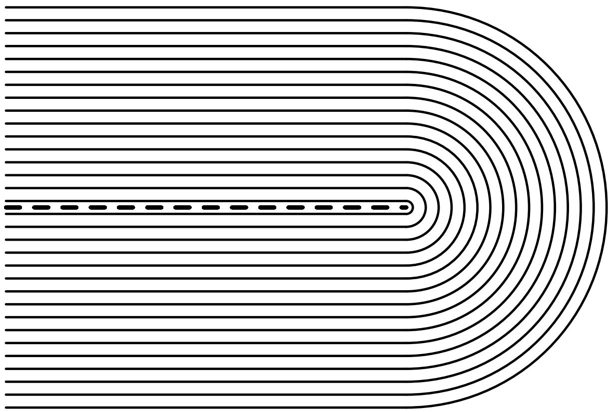
Úloha III.P ... složený papír

8 bodů; průměr 5,40; řešilo 40 studentů

Každý to jistě někdy slyšel a určitě i zkusil: „List papíru nelze na půlku přeložit více než sedmkrát.“ Je to ale skutečně pravda? Najděte hraniční podmínky.

Kuba se nudil a skládal papír.

Je dobré si uvědomit, že hlavní problém je se stále se zvyšující tloušťkou, která narůstá exponenciálně.[1] Uvažujme několik vrstev papíru položených na sobě a přeložme celou hromadu napůl, výsledek by měl vypadat přibližně jako na obrázku 1.



Obr. 1: Obrázek ilustrující jak vypadá přeložení, když překládáme více vrstev papíru najednou.

Pokud si domyslíme třetí rozměr, bude mít každá vrstva tvar povrchu válce. Ten má nulovou Gaussovu křivost, díky čemuž máme možnost tento tvar složit z listu papíru. Nyní můžeme provést další přehyb okolo osy ležící v zatím rovinné části papíru. Tuto osu můžeme volit více způsoby. Buď osu přehybu zvolíme rovnoběžně s první osou, nebo k ní kolmou, nebo s ní svírající obecný úhel. Pokud zvolíme osu rovnoběžně, vytvoříme další válec s nulovou křivostí, kdežto pokud zvolíme kolmo k původní, vytváříme povrch toru, který má křivost nenulovou, a proto klade papír mnohem větší odpor, protože se musí deformovat i v ploše papíru.[2] Proto budeme uvažovat papír efektivně jednodimenzionální, jako bychom napůl přehýbali dlouhý a úzký pás papíru.

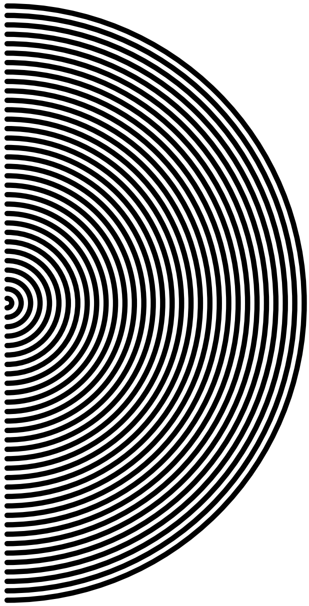
Dále si všimněme, že při přehybu napůl polovina každé vrstvy skončí nad střední rovinou[3] a druhá pod ní, což znamená, že touto rovinou musí procházet tolik vrstev, kolik vrstev přehýbáme. Z toho rovnou můžeme vyvodit že papír nelze přehýbat donekonečna, protože kvůli zachování celkového objemu bychom potřebovali šířku paklíku ztenčovat donekonečna, což ale evidentně nelze.[4]

[1] Můžete si sami spočítat, že běžný papír přeložený dvaačtyřicetkrát napůl by byl vysoký až na oběžnou dráhu měsíce.

[2] Při vnějším okraji se natahuje a při vnitřním se krabatí, jak si můžete sami doma vyzkoušet.

[3] V obrázku vyznačena čárkovaně.

[4] Pokud bychom skládali papír do harmoniky, toto omezení není a můžeme ho přeložit vícekrát než u překládání napůl.



Obr. 2: Výsledný tvar, který už vícekrát nejde přeložit

Lze tedy udělat horní odhad pro maximální počet přehybů. Představme si stav jako na obrázku 2. Pak můžeme spočítat celkovou délku papíru potřebnou pro vytvoření takového obrazce pro daný počet vrstev. Označme d tloušťku papíru a l celkovou délku potřebného papíru. Uvažujme situaci rovnou s 2^{n-1} vrstvami, což je stav po $n-1$ přehybech napůl. Uvědomme si, že protože délka oblouku roste s jeho poloměrem lineárně, součet obvodů vnějšího a vnitřního oblouku je stejný jako dvojnásobek délky uprostřed vrstvy. Totéž platí pro další vrstvy. Tedy celková délka 2^{n-1} vrstev o poloměrech od 0 do $2^{n-1}d$ je stejná jako délka 2^{n-1} vrstev o poloměru $2^{n-1}d/2$. Dosazením dostáváme vzorec pro délku pro n vrstev papíru

$$l = \frac{\pi}{2}2^{2n-2}d\frac{\pi}{8}4^n d\,, \tag{1}$$

z čehož dokážeme vyjádřit maximální počet přehybů n pro fixní l

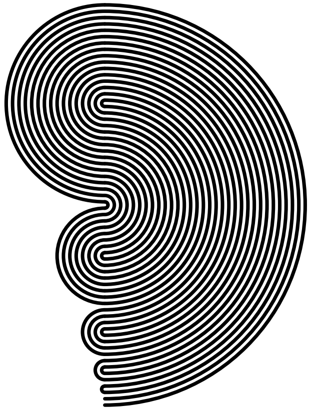
$$n_{\max} = \log_4\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{d}\right) = \log_4\left(\frac{8}{\pi}\eta\right)\,, \tag{2}$$

kde jsme zavedli $\eta = \frac{l}{d}$ jako bezrozměrný parametr překládaného papíru.

Pokud bychom tento odhad chtěli zpřesnit, musíme uvažovat i papír spotřebovaný na všechny předchozí přehyby. Získáme tak model přehybů odpovídající obrázku 3.

Celkovou délku papíru získáme sumou přes všechny přehyby, kde délka každého přehybu je dána vzorcem (1), takže pro n přehybů dostáváme

$$l = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{8}2^{2k}d\,.$$



Obr. 3: Výsledný tvar, který již nejde vícekrát přeložit se zakreslením předchozích přehybů

Tuto sumu ale dokážeme převést na součet geometrické řady

$$l = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{8} 2^{2k} d = \frac{\pi d}{8} \sum_{k=1}^{n} 4^k = \frac{\pi d}{2} \frac{4^n - 1}{4 - 1} \approx \frac{\pi d 4^n}{6} .$$

Poslední aproximaci lze použít s rozumnou přesností pro $n \geq 2$. Ze vzorce vidíme, že na přidání dalšího přehybu potřebujeme nikoliv dvojnásobný pás papíru, ale dokonce čtyřnásobný.[5] Maximální počet přehybů je pak dán vzorcem

$$n_{\max} \approx \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{6}{\pi} \eta \right) . \tag{3}$$

Dosazením hodnot pro papír formátu A4, pokud děláme přehyby jen po tom samém směru (tak, abychom přehýbali tu delší hranu), které jsme odhadli na $d = 0{,}1\,\mathrm{mm}$, $l = 300\,\mathrm{mm}$, $\eta = 3000$, získáváme $n \approx 6.24$. To se nám skutečně potvrdilo (konzistentně s tím, že se jedná o horní odhad), když jsme překládali papír a tímto způsobem ho skutečně přehli pětkrát, tak přehyb pošesté vypadal sice obtížně, ale nezdál se nemožný. Ale pak by rozhodně nešel papír přehýbat v druhém směru, protože by nám nedržely vrstvy na sobě.

Nyní ale máme teoreticky ještě druhý směr, ve kterém je 20 cm nevyužitého papíru. Bohužel ale už tloušťka není tloušťka papíru, ale součet všech vrstev z předchozího přehýbání. V našem příkladu je to $d = 0{,}1 \cdot 2^5\,\mathrm{mm} = 3{,}2\,\mathrm{mm}$, tudíž $\eta = 62{,}5$. Potom $n \doteq 3{,}45$, což se také potvrdilo, protože jsme papír přehli ještě třikrát ve druhém směru.[6] Vidíme, že kancelářský papír formátu A4 lze přeložit napůl minimálně osmkrát, tedy často opakované tvrzení o sedmi přeloženích neplatí.

Pokud překládáme vrstvy střídavě nebo nějak jinak, musíme začít uvažovat ne o délce papíru, ale o celkové ploše papíru ztracené v přehybech. Ta je ale, protože papír má tvar válce, dána vzorcem (1) přenásobeném zbývající délkou v druhém směru. Proto, pokud chceme

[5] To ale vyplývá už ze (2), pokud se nad ním trochu zamyslíme.

[6] Nutno podotknout, že po pěti přehybech jsme naměřili šuplerou tloušťku jen 3 mm, což je nižší hodnota než ta použitá v odhadech.

snížit množství plochy ztracené v posledních přehybech (kdy se ztrácí nejvíce papíru), musíme mít co nejmensí délku ve směru kolmém na přehýbání. Toho dosáhneme právě tehdy, když nejprve přehneme podél jedné strany maximální počet přehybů, které nám papír dovolí, a pak překládáme ve druhém směru. Z toho je vidět, že daný papír nemůžeme obecně přeložit vícekrát, pokud střídáme přehyby, než pokud přehýbáme papír nejdříve v jednom směru a pak v druhém směru. Jen pokud bychom měli papír s takovými rozměry, že maximální počet přehybů v obou směrech[7] podle vzorce (3) vychází těsně menší, než nejbližší vyšší celé číslo, můžeme nějakým konkrétním proházením pořadí přehybů dosáhnout toho, že maximální počet zvýšíme o trochu v jednom směru na úkor směru druhého. Tím sice celkový součet nezaokrouhlených čísel klesne, ale po zaokrouhlení (samozřejmě dolů) získáme jeden přehyb navíc tím, že jeden ze směrů dostaneme přes celé číslo, zatímco to druhé si „nezkazíme“. Ale správné pořadí je nutné najít pro každé rozměry papíru zvlášť.

Ještě musíme říct, že všechny uvedené vzorce jsou jen horním odhadem, protože jsme neuvažovali papír ztrácející se jinak než ve válcových přehybech. Jeden ze zdrojů dalších ztrát byl popsán na začátku tohoto textu, tedy deformace papíru a z toho vyplývající menší doléhání papíru při přehybech. Z tohoto důvodu je též výhodné nestřídat směry a začít kratší stranou. Druhý problém souvisí s rozjížděním papíru, který překládáme. Jednak, když překládáme více vrstev, ve vrstvách na vnitřní straně se ztrácí mnohem méně, než na těch vnějších, čímž se vůči sobě konce jednolivých vrstev posunou. Tomu se lze vyhnout nejlépe tak, že odhadneme posunutí v jednotlivých vrstvách a budeme dělat příslušné přehyby mírně asymetricky.[8] Zároveň, pokud po překládání v jednom směru bude zbylý proužek příliš úzký, vrstvy při překládání ve směru druhém nebudou držet na sobě, což se stane například tehdy, pokud A4 překládáme nejdříve podél kratší strany. Co se týče síly potřebné k přeložení vrstvy, ta sice narůstá, ale je samozřejmě možné překládanou vrstvu rozložit na dílčí části, které lze přeložit zvlášť.[9] Proto jsme tento problém nepovažovali za omezující faktor.

Na závěr se sluší podotknout, že se tímto přístupem proslavila americká studentka Britney Gallivanová, která má díky tomu vlastní článek na anglické Wikipedii. S řešením, včetně experimentálního potvrzení hypotézy a nového rekordu v počtu přehnutí přišla na střední škole ve svých sedmnácti letech. My jsme získali trochu jiný vzorec, protože jsme řešení hledali nezávisle, takže jsme použili jiný předpoklad, kde bereme poloměr vrstvy. U nás to byl střed, u Gallivanové pak vnější okraj.

Poznámky k došlým řešením

Sešlo se mnoho způsobů řešení, některé čistě teoretické, jiné naopak byly velice experimentální. Někteří z vás jen vyjmenovali efekty, kteřé se budou projevovat, zatímco jiným se i povedlo kvantifikovat, jak moc budou tím omezujícím faktorem. Většina se zabývala buď sílou potřebnou k přehybu, nebo nutnými rozměry papíru pro daný počet přehybů, mnozí i vycházeli z práce Gallivanové. Nejvíc organizátory pobavilo řešení, kde některý z vás jako experimentální vzorek

[7] V druhém směru ale musíme použít celkovou tloušťku po provedení přehybů ve směru prvním.

[8] Bohužel musíme pro každý přehyb počítat s posunutím ve všech dalších, což vyžaduje opravdu dokonalé plánování.

[9] U prvního přehybu to sice nejde, ale na druhou stranu nepřekládáme železný plech.

použil výpis z vysvědčení a přiložil fotodokumentaci.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.