

Úvodem

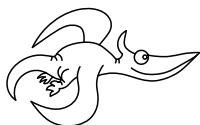
Milé řešitelky, milí řešitelé,

blíží se Vánoce a s nimi tradičně přichází třetí série FYKOSu. Pro zpříjemnění adventu je to tentokrát spíše mix témat, najdete zde i problém skládání papíru. Experimentální úlohu si povězte na ledničku, ať se o ní lépe přemýšlí :). Ve třetím díle seriálu se budete náhodně procházet po pokročilejších numerických metodách, tak se neztraťte, ale nalezněte nějaký hezký integrál.

Také Vám s radostí oznamujeme, že na fyziklani.cz se již nyní můžete přihlašovat do 12. ročníku týmové soutěže FYKOSí Fyziklání. Přihlašování neodkládejte, zejména jste-li přespolní, abyste nepřišli o místa v hostelech na přespání před soutěží.

Pěkné chvíle strávené s našimi úlohami a pohodové Vánoce přejí

Organizátoři



Zadání III. série

Termín uploadu: 9. 1. 2018 23.59

Termín odeslání: 8. 1. 2018

Úloha III.1 ... zpomalená

3 body

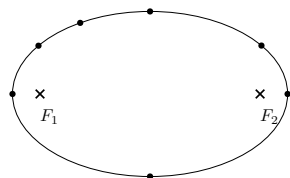
Představme si, že na kameru se snímkovou frekvencí 24 snímků za sekundu (uvažujme časově rovnoměrně rozložené a dokonale ostré snímky) natočíme let vrtulníku s otáčkami hlavního rotoru 2900 ot./min. Následně si záznam přehrajeme. Jaká bude zdánlivá frekvence otáček rotoru na záznamu?

Úloha III.2 ... zrychleníčko, zrychlení

3 body

Na obrázku vidíte náčrt elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a několika vyznačenými body na ní. Uvažujte, že elipsa znázorňuje trajektorii nějakého hmotného bodu. Znázorněte do obrázku zrychlení, která působí na hmotný bod v jednotlivých vyznačených bodech dráhy pro dvě situace (jde o směry a vzájemné poměry zrychlení (které je větší/menší) v různých bodech v rámci jednoho náčrtu).

- V ohnisku F_1 je umístěno hmotné těleso, kolem kterého hmotný bod obíhá. Uvažujeme, že platí 2. Keplerův zákon.
- Těleso má konstantní velikost rychlosti, pouze se pohybuje po elipse.



Úloha III.3 ... IDKFA

6 bodů

Vypálili jste na impa z plazmové pušky, která střílí stabilní shluk částic s rovnoměrným rozdělením podélné rychlostí v intervalu $\langle v_0, v_0 + \delta v \rangle$ (příčná rychlost je nulová) a s celkovou energií E_0 . Hlaň pušky má průřez S a pulz trvá nekonečně krátký čas. Jak daleko musí imp stát, aby se mu nic nestalo? Předpokládejte, že jeho kůže bez problémů uchládí na malém prostoru tepelný tok q .

Úloha III.4 ... upuštěná propiska

7 bodů

Propisku (tuhou tyč) upustíme na stůl tak, že během svého letu svírá úhel α s vodorovnou rovinou. Jakou rychlostí dopadne její druhý konec (ten, co se stolu dotkne jako druhý), jestliže jsme těžiště upustili z výšky h ? Všechny srážky jsou nepružné a tření mezi stolem a koncem propisky dostatečně velké.

Bonus Spočítejte, jaký musíme zvolit úhel α , aby druhý konec dopadl s co nejvyšší rychlostí. Pro jaké výšky se vyplatí propisku naklonit?

Úloha III.5 ... rozpad sem, rozpad tam

8 bodů

Máme A_0 částic typu A , které se s rozpadovou konstantou λ_A rozpadají na částice typu B . Ty se zase s rozpadovou konstantou λ_B rozpadají na částice typu A a na začátku jich je B_0 . Najděte funkci udávající poměr počtů částic typů A a B v čase.

Úloha III.P ... složený papír

8 bodů

Každý to jistě někdy slyšel a určitě i zkusil: „List papíru nelze na půlku přeložit více než sedmkrát.“ Je to ale skutečně pravda? Najděte hraniční podmínky.

Úloha III.E ... magneticky přitažlivá

12 bodů

Společně se zadáním této série jsme vám rozeslali poštou plošný magnet (magnetickou fólii). Tento magnet je trochu jiný než tyčové magnety – v ploše se střídavě střídají severní a jižní pól. Díky tomu se při přiblížení k feromagnetickému povrchu uzavře skrz kov „magnetický obvod“ a magnet drží (např. na ledničce) a unese na sobě třeba i obrázek. Vašimi úkoly jsou:

- Změřit plochu a tloušťku fólie, kterou využijete k experimentům.
- Změřit střední vzdálenost mezi dvěma nejbližšími stejnými magnetickými póly (dvojnásobek opačných).
- Změřit maximální užitečnou hmotnost (tedy hmotnost bez hmotnosti magnetu), kterou unese 1 cm^2 magnetu, je-li zatížení magnetu rovnoměrné, pokud magnet přichytíte zespoda k vodorovně umístěnému cca. 1 mm tlustému plechu z magneticky měkké oceli.

Nezapomeňte určit i chyby měření. Fólie, kterou jsme vám dodali, může být samolepicí (je přes ni bílá fólie a pod ní lepidlo). V tom případě bílou fólii nahraďte něčím, na co budete upevňovat užitečnou hmotnost.

Úloha III.S ... na procházce s integrály

10 bodů

- Vymyslete tři odlišné příklady markovovského procesu, z toho alespoň jeden fyzikální. Je procházka bez návratu markovovská? A co procházka bez křížení?
- Mějme 2D náhodnou procházku bez návratu na čtvercové síti s počátkem v bodě $(x, y) = (0, 0)$, která je omezena absorpčními bariérami $b_1: y = -5$, $b_2: y = 10$. Nalezněte pravděpodobnost, že v bariéře b_1 skončíme dříve než v b_2 .
- Proveďte simulaci pohybu brownovské částice ve 2D a vykreslete graf závislosti střední vzdálenosti od počátku na čase. Uvažujeme diskrétní čas a konstantní délku kroku (jeden krok simulace trvá $\Delta t = \text{konst}$, délka kroku je $\Delta l = \text{konst}$) a umožňujeme pohyb do libovolného směru, tj. každý krok je specifikován délkou a úhlem $\vartheta \in (0, 2\pi)$, přičemž všechny směry jsou stejně pravděpodobné. Zajímá nás především asymptotické chování, tedy vývoj střední vzdálenosti pro $t \gg \Delta t$.

d) Chybová funkce je definována vztahem

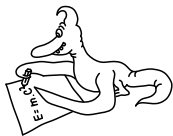
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Tabelujte tuto funkci, tedy vypočtete integrál pro mnoho různých x . Do řešení nevkládejte tabulku hodnot, ale graf funkce. Zkuste tuto funkci opět numericky zderivovat. Co dostanete?

e) Najděte si definici hustoty pravděpodobnosti Maxwellova-Boltzmannova rozdělení $f(v)$, tedy rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu. Spočítejte pak pomocí MC integrace střední hodnotu rychlosti definovanou

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv,$$

přičemž pro vzorkování použijte náhodná čísla dle Maxwellova-Boltzmannova rozdělení získaná Metropolisovým-Hastingsovým algoritmem. Hodnotu pro konkrétní zvolené parametry srovnajte s hodnotou z literatury.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... Zuběnka

3 body; průměr 1,96; řešilo 50 studentů

Jak velké skladovací prostory by musela mít Víla Zubnička, aby mohla skladovat všechny mléčné zuby všech dětí? Resp. jakým tempem by její nároky na uskladnění rostly? Za jakou dobu by teoreticky měla ve svých skladech většinu zásob fosforu na Zemi?

Karel se myšlenkách vrací na Zeměplochu.

Úloha je pekne rozdelená na tri časti, je teda vhodné riešiť ich v zadanom poradí. Najprv sa teda pozrieme na to, ako veľké skladovacie priestory by musela mať Zubnička¹. Rôzne zdroje uvádzajú rôzne čísla o tom, koľko ľudí žilo doposiaľ na Zemi, väčšina sa ale zhodne na číslo blízkom 100 miliardám. Orientovali sme sa wikipédiou² ktorá tvrdí, že na svete žilo od roku 50 000 p.n.l. 106 miliárd ľudí. Ďalšou vecou, na ktorú nesmieme zabúdať, je to, že až 8 % detí zomrie do veku 5 rokov. V minulosti to bolo určite oveľa viac, som presvedčený, že napríklad počas obdobia morovej epidémie v Európe bolo toto číslo väčšie ako 50 %. Preto tento fakt výrazne ovplyvní to, ako veľké budú sklady v súčasnosti. Ďalej rátaťme, že každý z týchto ľudí mal 20 mliečnych zubov a Víla Zubnička ich všetky uložila (ide o horný odhad – víla radšej nebude riskovať, že nebude mať dosť priestoru). Ďalej rátaťme, že pri vhodnom naskladaní zaberie jeden mliečny zub objem približne $0,25 \text{ cm}^3$ – v literatúre sme žiadnu relevantnú informáciu o objeme zubov nenašli, odmerali sme teda priemerný objem niekoľkých mliečnych zubov (nesmieme zabúdať, že mliečne zuby sú o niečo menšie ako trvalé a zároveň nemajú korene). V takom prípade budeme potrebovať úložné priestory o veľkosti $530\,000 \text{ m}^3$. Ale ako sme povedali v predošlej časti, ich objem by bol pravdepodobne niekde medzi $530\,000 \text{ m}^3$ a $265\,000 \text{ m}^3$. Ak uvažujeme jednonposchodové sklady, mohli by sme zuby skladovať do výšky napríklad 5 m; v takom prípade by sa sklady rozprestierali na ploche 5 až 10 hektárov.

Teraz sa pozrieme na to, akým tempom by rástli skladovacie nároky. Podľa OSN bol v roku 2016 nárast populácie 1,1 % (1,8 % sa narodí a 0,7 % zomrie). Aj keď nie je jasné, ako bude trend pokračovať, všetko nasvedčuje tomu, že za najbližších 100 rokov sa počet obyvateľov zeme ustáli na nejakej hodnote, rôzne zdroje to odhadujú na 6 až 12 miliárd obyvateľov. Nech je ako chce, znamená to, že za tých 100 rokov sa ročne bude rodiť a umierať približne rovnaký počet ľudí, čo pre Zubničku znamená, že bude každým rokom stabilne inkasovať konštantný počet zubov. Budeme rátať, že sa populácia ustáli na súčasných 7,4 miliardách. Zároveň budeme rátať, že úmrtnosť detí klesne vďaka medicíne takmer na nulu. Môžeme ale predpokladať, že úmrtnosť bude rovnaká v budúcnosti ako súčasných 0,7 % z tohto počtu ročne, s tým rozdielom, že sa bude aj rodiť rovnaký počet ľudí, t.j. natalita bude tiež 0,7 %. Ročne teda pribudne na zemi asi 52 miliónov ľudí, čo sa pri dobudovávaní skladu s rovnakou výškou efektívne premetne do nutnosti zväčšiť jeho plochu o 50 m^2 za rok. Avšak takéto tempo zvyšovania kapacít bude dostatočné až v roku povedzme 2115, dovtedy bude pôrodnosť najprv rásť a potom sa zasa znižovať. Ak by sa dlhodobo udržala pôrodnosť na takej úrovni ako teraz, t.j. ročne sa narodí 1,8 % ľudí z toho, čo aktuálne žije, muselo by byť prvých niekoľko rokov od súčasnosti

¹preklad pre Čechov: Zuběnka

²https://cs.wikipedia.org/wiki/Sv%C4%9Btov%C3%A1_populace; z tohto zdroja sme čerpali aj ďalšie čísla spomínané v riešení

zvyšovanie priestoru skladov 2,5krát rýchlejšie, t.j. bolo by treba pridávať 130 m^2 skladovacích priestorov za rok navyše.

Tretou otázkou je, kedy by Víla Zubnička vlastnila viac ako polovicu všetkých zásob fosforu na Zemi. Z wikipédie³ vieme, že na Zemi je 1210 ppm fosforu. To znamená, že viac ako tisícina hmotnosti Zeme je fosfor. My sa uspokojíme s odhadom $1/1000$ – hmotnosť Zeme je $5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$, je na nej teda zhruba $6 \cdot 10^{21}\text{ kg}$ fosforu. Z ďalších zdrojov⁴ vidíme, že fosfor tvorí asi 19% hmotnosti zubu. Vážením vlastných mliečnych zubov sme stanovili, že priemerná hmotnosť zubu nie je väčšia ako 0,3 g. (Aj to je veľmi nadstretlený odhad.) Z daných údajov vieme spočítať, že súčasné Zubničkine zásoby pokrývajú len zlomok svetových zásob fosforu, asi jednu $5 \cdot 10^{13}$ -tinu. Ako sme si už povedali, najreálnejší model vývinu populácie je, že sa do 100 rokov ustáli na konečnej hodnote, v rozmedzí 6 a 12 miliárd. V predošlej časti sme ráтали s prírastkom populácie z dlhodobého hľadiska (to, čo sa bude diať za tých 100 rokov dovedy nás nezaujima, lebo je to kvôli dlhjej časovej škále zanedbateľné) 52 miliónov ľudí ročne, čo činí asi miliardu zubov ročne. Ak by týmto tempom navždy pokračoval nárast počtu mliečnych zubov, tak by Zubnička dosiahla väčšinový podiel za približne $1 \cdot 10^{17}$ rokov. Čo len tak pre zaujímavosť znamená, že ak by jej sklady zaberali plochu celej Zeme vrátane morí a oceánov (ľudia by sa museli uskromniť a žiť na streche skladov) tak by mali pri rovnakej hustote ukladania zubov (4 na mililiter) budovy skladov výšku 50 km.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz

Úloha II.2 ... irradiacie solárnej elektrárny 3 body; průměr 2,79; řešilo 56 studentů

Solární konstanta, či správněji solární irradiace, je tok energie přicházející ze Slunce ve vzdálenosti Země od Slunce. Nejde o konstantu, ale uvažujme, že má hodnotu $P = 1370\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Uvažujme, že Země obíhá Slunce po kružnici a sklon zemské osy vůči kolmici k její oběžné rovině je $23,5^\circ$. Jaký bude maximální výkon zachycený solárním panelem o ploše $S = 1\text{ m}^2$ o letním a zimním slunovratu, pokud panel leží na rovném povrchu Země v Praze? Uvažujte, že ani atmosféra ani budovy nijak neovlivní měření. Karel si pustil Crash Course Astronomy.

Protože máme počítat s kruhovou orbitou Země a výkonový tok Slunce máme zadaný, stačí ho jen přenásobit plochou solárního panelu kolmou na paprsky. Tady si ale musíme uvědomit, že paprsky nebudou dopadat kolmo na plochu panelu, ale pod určitým úhlem. Ten závisí na zeměpisné šířce Prahy ϑ_P , kterou můžeme zjistit například odtud⁵, $\vartheta_P \approx 50^\circ$. Víme, že při zimním slunovratu dopadají paprsky kolmo na $\vartheta_z = -23,5^\circ$ ⁶. Při letním slunovratu dopadají paprsky kolmo na $\vartheta_l = +23,5^\circ$. Z geometrie vidíme, že úhel, pod kterým budou dopadat paprsky na pražský solární panel (úhel mezi tečnou k zemi a paprskem) vypočítáme z rovnice

$$\alpha_i = 90^\circ - |\vartheta_P - \vartheta_i|.$$

Dosažením získáme $\alpha_z = 16,5^\circ$ a $\alpha_l = 63,5^\circ$.

Pro maximální výkon počítejme se stoprocentní účinností. Plocha panelu kolmá na paprsky je $S \sin \alpha_i$, maximální výkon tedy spočítáme jako

$$P_i = PS \sin \alpha_i,$$

³https://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_the_chemical_elements

⁴<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1263223/?page=2>

⁵https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_měst_podle_zeměpisné_šířky

⁶ Používáme konvenci, že rovník má 0° , severní šířky jsou kladné a jižní šířky záporné.

kde S označuje plochu solárního panelu. Číselným dosazením dostaneme $P_1 = 1,23 \text{ kW}$ a $P_2 = 0,39 \text{ kW}$. Můžeme si všimnout, že jen díky jinému postavení Slunce na obloze se sníží výkon solární elektrárny v zimě na třetinu jejího letního výkonu. V zimě také bývá vyšší oblačnost než v létě, což rozdíl mezi zimním a letním výkonem elektrárny ještě více prohlubuje.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha II.3 ... pozorovací

6 bodů; průměr 5,19; řešilo 54 studentů

Jakou část povrchu kulové planety není možné vidět ze stacionární oběžné dráhy planety (taková dráha, že se obíhající objekt nachází stále nad stejným bodem na planetě), která má hustotu ρ a periodu rotace T ?
Filip procházel nevidené úlohy z Náboja.

Vo vzájemnej sústave spojenej s rotujúcou planétou sa satelit na stacionárnej dráhe nepohybuje, preto naň pôsobí nulová výsledná sila F . Táto sila sa skladá z dvoch zložiek - gravitačnej sily F_g a odstredivej sily F_{od} , ktoré pôsobia navzájom opačným smerom:

$$0 = F = F_{od} - F_g = m\omega^2 r - \frac{GmM}{r^2}, \quad (1)$$

kde m je hmotnosť satelitu, ω je uhlová rýchlosť rotácie planéty, r je vzdialenosť satelitu od stredu planéty, M je hmotnosť planéty a G je gravitačná konštanta.

Pre uhlovú rýchlosť platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

z čoho po dosadení do (1) a úprave máme

$$\frac{T^2 GM}{4\pi^2} = r^3.$$

Hmotnosť planéty určíme z jej hustoty ρ a polomeru R

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Po dosadení a úprave dostávame vyjadrenie vzdialenosti satelitu od stredu planéty v jednotkách jej polomeru ako

$$\sqrt[3]{\frac{T^2 G \rho}{3\pi}} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

Zvyšok úlohy je už len geometria. Pozorovateľ na satelite totiž vidí časť povrchu planéty, ktorá je ohraničená kružnicou k , tvorenou bodmi dotyku dotyčníc vedených zo satelitu ku guľovému povrchu planéty. Zaujímá nás teda povrch guľového vrchlíka S (ktorý pozorovateľ vidí), pre ktorý platí⁷

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha),$$

kde α je uhol satelit – stred planéty – bod na kružnici k .

⁷Dá sa to odvodiť integrovaním. Známy je tiež vzorec $S = 2\pi Rh$, kde $h = R - R \cos \alpha$ je výška vrchlíka. Všimnite si, že napr. $\alpha = \pi$ dá celý povrch gule $4\pi R^2$.

Ramená tohto uhla majú dĺžky r , resp. R a v bode dotyku je pravý uhol, preto

$$\cos \alpha = \frac{R}{r}.$$

Po dosadení do (2) dostávame

$$S = 2\pi R^2 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3\pi}{T^2 G \rho}} \right).$$

Zaujíma nás ale, akú časť k celého povrchu planéty pozorovateľ nevidí:

$$k = 1 - \frac{S}{4\pi R^2} = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{3\pi}{T^2 G \rho}} \right)}{2}.$$

Pre zaujímavosť, v prípade Zeme, ktorá má strednú hustotu $\rho = 5,515 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a rotačnú dobu $T = 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$, pozorovateľ nevidí $k = 0,575$ jej povrchu.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha II.4 ... jaderný odpad nikdy více 6 bodů; průměr 3,51; řešilo 47 studentů

Představme si, že máme něco (například jaderný odpad) a chceme se toho zbavit. Těleso dostaneme na oběžnou dráhu Slunce shodnou s oběžnou dráhou Země, ale dostatečně daleko od Země, abychom mohli gravitační působení Země nadále zanedbávat. Otázka je, jaký způsob zbavení se inkriminovaného předmětu by nás stál kolik energie a který postup by byl tedy nejvýhodnější. Varianty jsou

- *Hodit to do Slunce. Stačí, aby se to dostalo na sluneční povrch a bude to dostatečně usmažené.*
- *Převést to na kruhovou dráhu v Hlavním pásu (pás planetek mezi Marsem a Jupiterem).*
- *Vyhodit to zcela ze Sluneční soustavy.*

Karel přemýšlel nad tím, co je vlastně SEO a narazil na úlohu.

Nebudeme uvažovat gravitační vliv ostatních planet Sluneční soustavy. Kdybychom povolili využití gravitačního praku (tj. manévru, při kterém je těleso urychleno nebo zpomaleno při průletu okolo planety, přičemž lze změnit i směr rychlosti), stačilo by pak těleso dopravit k nějaké planetě (Venuši nebo Marsu) a pomocí opakovaných gravitačních manévru bychom ho byli schopni dopravit téměř kamkoliv bez dalších energetických nákladů. V této úloze nám nejde o to, jak dlouho bude trvat přeprava tělesa, proto bychom mohli velmi dlouho čekat, dokud se určitá planeta nevyskytne v určité pozici a postupnými manévry (mezi nimiž mohou být staleté prostoje) náklad dostat do požadované pozice.

Označme si hmotnost tělesa m , hmotnost Slunce M , vzdálenost Země–Slunce R a počáteční rychlost (před výstřelem) v_0 , kterou spočítáme z rovnosti odstředivého a gravitačního zrychlení

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Z energetického hlediska je pro nás nejvýhodnější rovnou těleso vystřelit z původní orbity. Kdybychom ho naložili na nějakou raketu, která by ho postupně urychlovala, tak by se zbytečně

spotřebovala energie na urychlování rakety a paliva a raketový motor nemůže mít ani teoreticky 100% účinnost. Uvažujeme tedy, že těleso odpálíme jednorázově z nějaké stanice, které má mnohem větší hmotnost, a proto můžeme předpokládat, že celková spotřebovaná energie odpovídá změně rychlosti tělesa

$$E = \frac{1}{2}m|\Delta\mathbf{v}|^2.$$

Pryč ze Sluneční soustavy

Naším cílem je uvést těleso na parabolickou dráhu tak, aby se nikdy nevrátilo zpět. Odletí od Slunce tak, že se bude neustále vzdalovat a zpomalovat, ale teoreticky se zastaví až v nekonečnu (za nekonečný čas). V nekonečnu bude mít nulovou potenciální i kinetickou energii. Ze zákona zachování energie tedy vyplývá, že bychom ho měli urychlit na rychlost v_1 tak, aby jeho celková energie byla nulová

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{R} = 0,$$

kde jsme využili vztah pro potenciální energii v radiálním gravitačním poli. Výsledná rychlost je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Této rychlosti dosáhneme nejspíše (při minimálním $|\Delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0|$) tak, že těleso urychlíme ve směru jeho rychlosti, tedy ve směru tečném k oběžné dráze. Potřebujeme tedy zvýšit jeho rychlost o

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 12,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3)$$

Této rychlosti se mimochodem někdy říká 3. kosmická rychlost. Potřebná energie je

$$E_1 = (3 - 2\sqrt{2}) \frac{GMm}{2R}.$$

Hlavní pás

Chceme-li těleso dostat na kruhovou oběžnou dráhu v Hlavním pásu, bude potřeba provést dva manévry. Nejprve těleso převedeme na eliptickou dráhu (tzv. Hohmannova elipsa) s periheliem na oběžné dráze Země a afeliem v Hlavním pásu. Až se dostaneme do afelia, zvýšíme rychlost tak, aby těleso zůstalo na kruhové dráze v této vzdálenosti od Slunce. Tomuto přechodu mezi dvěma orbitami se říká Hohmannova trajektorie.

Problém je v tom, že nemůžeme těleso jen jednou urychlit (vystřelit), ale potřebujeme manévrovat dvakrát. Takže si musíme vyslat těleso i spolu s nějakou raketou, motorem, který ho pak může převést na kruhovou dráhu.

Poloměr Hlavního pásu označíme R_A . Chceme spočítat rychlost v_3 , na kterou těleso musíme urychlit, aby se pohybovalo po zmíněné eliptické dráze. Vyjdeme ze zákona zachování energie pro stav v periheliu a afeliu

$$\frac{1}{2}m'v_3^2 - \frac{GMm'}{R} = \frac{1}{2}m'v_A^2 - \frac{GMm'}{R_A},$$

kde m' je hmotnost tělesa i s raketou a v_A je rychlost v afeliu, kterou můžeme vyjádřit z Keplerova zákona

$$v_A R_A = v_3 R.$$

Vyjádřením v_3 z těchto dvou rovnic dostáváme

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM R_A}{R(R_A + R)}}.$$

Nyní, když máme těleso na eliptické dráze, musíme v afeliu zvýšit jeho rychlost

$$v_A = \sqrt{\frac{2GMR}{R_A(R_A + R)}}$$

na rychlost

$$v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_A}}.$$

Postupné změny rychlostí (znaménko jsme volili tak, aby $\Delta v_3, \Delta v_4 > 0$) jsou tedy

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_A + R}} - 1 \right),$$

$$\Delta v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_A}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_A}} \right).$$

Uvažujme, že těleso společně s palivem a další zátěží o hmotnosti $m_2 = m' - m$ vyšleme z původní orbity Slunce na eliptickou dráhu. Na to je potřeba energie

$$E_{3a} = \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2.$$

Když se vyslaný objekt dostane do afelia, potřebujeme jeho rychlost zvýšit o Δv_4 . Ale to nepůjde jen tak. Abychom těleso urychlili, musíme podle zákona zachování hybnosti něco jiného zpomalit (nebo urychlit opačným směrem). To by se dalo vyřešit zapnutím raketového motoru, který vysílá urychlené palivo opačným směrem. Z energetického hlediska bude nejvýhodnější, když všechno palivo vyšleme určitou rychlostí Δu_2 najednou. Skutečný motor by měl menší účinnost, ale následujícím způsobem lze spočítat alespoň teoretické minimum potřebné energie.

Ze zákona zachování hybnosti

$$\Delta v_4 m = \Delta u_2 m_2,$$

$$E_{3b} = \frac{1}{2} m \Delta v_4^2 + \frac{1}{2} m_2 \Delta u_2^2 = \frac{1}{2} m \Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2} \Delta v_4^2.$$

My hledáme takovou hmotnost m_2 , aby celková spotřebovaná energie $E_3 = E_{3a} + E_{3b}$ byla co nejmenší. To najdeme tak, že derivaci E_3 podle m_2 položíme rovnou nule.

$$\begin{aligned}\frac{dE_3}{dm_2} &= -\frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}\Delta v_3^2 = 0, \\ \frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 &= \frac{1}{2}\Delta v_3^2, \\ m^2\Delta v_4^2 &= m_2^2\Delta v_3^2, \\ m_2 &= m\frac{\Delta v_4}{\Delta v_3}.\end{aligned}$$

Jde skutečně o minimum, protože v extrémních případech pro velmi malé nebo velmi velké m_2 jde E_3 k nekonečnu a tento výsledek je jakýsi kompromis mezi těmito extrémy. Po dosažení můžeme spočítat energii E_3

$$\begin{aligned}E_3 &= \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2}\Delta v_4^2, \\ E_3 &= \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\Delta v_4}{\Delta v_3}\right)\Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_3\Delta v_4 = \frac{1}{2}m(\Delta v_3 + \Delta v_4)^2.\end{aligned}$$

Vyšlo nám tedy, že potřebujeme minimálně takovou energii, která by stačila na urychlení tělesa na rychlost $\Delta v_{34} = \Delta v_3 + \Delta v_4$. Tomu se říká delta- v budget, což je celkový součet změn rychlosti během manévru, a to určuje celkovou potřebnou energii. Součet změn rychlosti je

$$\begin{aligned}\Delta v_{34} = \Delta v_3 + \Delta v_4 &= \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\sqrt{\frac{2R_A}{R_A + R}} - 1\right) + \sqrt{\frac{GM}{R_A}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_A}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{GM}{RR_A(R_A + R)}}\left(\sqrt{2}(R_A - R) + (\sqrt{R} - \sqrt{R_A})\sqrt{R_A + R}\right).\end{aligned}$$

Je známo⁸, že se Hlavní pás nachází ve vzdálenosti od 2 AU až po 4 AU, tedy $R_{A\min} = 2R$ a $R_{A\max} = 4R$.

$$\begin{aligned}\Delta v_{34\min} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 8,46 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \Delta v_{34\max} &= \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 13,3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

Z energetického hlediska je tedy nejvýhodnější vyslat těleso na bližší okraj Hlavního pásu. Potřebná energie pak je

$$E_{3\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \frac{GMm}{2R}.$$

Tento způsob vyžaduje nejméně energie ze všech tří možností, i když je relativně složitý.

⁸https://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_p%C3%A1s

Poznámka Někdo by mohl navrhnout použití přechodu pomocí dvou půlelips (tzv. „bi-elliptic transfer“), který spočívá v uvedení tělesa na eliptickou dráhu, jejíž hlavní poloosa je řádově větší, než je poloměr požadované finální orbity v Hlavním pásu. Následně je těleso v aféliu, kde se pohybuje malou rychlostí, zrychleno (na to není potřeba velké množství energie) tak, aby se perihelium nové eliptické trajektorie nacházelo ve vzdálenosti R_A od Slunce. V periheliu je pak těleso zpomaleno, aby zůstalo na kruhové oběžné dráze. Tato trajektorie může být v některých případech opravdu energeticky výhodnější, než je Hohmannova trajektorie. Ukazuje se ale⁹, že poměr poloměru konečné a původní trajektorie musí být alespoň 11,94 nebo větší. Takže v našem případě by se to nevyplatilo.

Do Slunce

V předchozích případech jsme těleso urychlovali, teď se nabízí ho zpomalit a nechat ho „spadnout“ do Slunce. Konkrétně ho stačí zpomalit tak, aby jeho eliptická trajektorie měla afélium na původní trajektorii a perihelium na obrácené straně povrchu Slunce (jiné trajektorie vyřešíme později). Při svém pohybu tedy jen „škrtně“ o povrch Slunce, ale to stačí na pohlcení. Označme R_S poloměr Slunce. Znovu použijeme zákon zachování energie.

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{R_S} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R},$$

kde v_2 je rychlost, na kterou jsme těleso zpomalili a v_P je rychlost v periheliu, kterou vyjádříme pomocí druhého Keplerova zákona

$$v_P = \frac{v_2 R}{R_S}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 R^2}{2R_S^2} - \frac{GM}{R_S} &= \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM}{R}, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2GMR_S(R - R_S)}{R(R^2 - R_S^2)}} = \sqrt{\frac{2GMR_S}{R(R + R_S)}}. \end{aligned}$$

Rychlost potřebujeme změnit o

$$\Delta v_2 = v_0 - v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R + R_S}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Při porovnání s (3) vidíme, že pokud platí

$$1 - \sqrt{\frac{2R_S}{R + R_S}} > \sqrt{2} - 1,$$

odeslání tělesa ven ze Sluneční soustavy je výhodnější, než by bylo jeho odeslání do Slunce. Po úpravě nerovnice dostáváme

$$R/R_S > \frac{2}{\sqrt{2} - 1},$$

což platí vždy pro $R_S \ll R$.

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Bi-elliptic_transfer

Existují ale i jiné, energeticky výhodnější způsoby, jak poslat těleso do Slunce. Například můžeme poslat těleso do nekonečna (tedy pryč ze Sluneční soustavy) a tam ho o malinko zpomalit. Vhodně zvolené (nekonečně malé) zpomalení způsobí, že jeho celková energie bude záporná a Slunce si ho tedy přitáhne zpět a pohltí. Sice spotřebujeme mnohem menší množství energie (stejně, jako v prvním případě – výstřelu do nekonečna), problém této metody ale spočívá v tom, že zabere nekonečně dlouhý čas.

Zajímá-li nás pouze minimální potřebná energie (a ne čas), je naše Δv :

$$v_1 = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Chceme-li těleso spálit Sluncem rychleji, stačí ho urychlit o něco menší rychlostí než v_1 . Tím se dostane na eliptickou trajektorii, jejíž afélium bude velmi daleko, je-li rychlost jen o málo menší než v_1 . V aféliu pak těleso zpomalíme na (skoro) nulovou rychlost a těleso tak prakticky spadne do Slunce. Na to ale spotřebujeme více energie, než by stačilo na samotný výstřel do nekonečna.

Čím rychleji ho budeme chtít dostat do Slunce, tím větší Δv bude potřeba a tím více energeticky náročný náš manévř bude. V extrémním případě můžeme těleso vystřelit vysokou rychlostí směrem ke Slunci (resp. kousek stranou, aby se tangenciální složka rychlosti odečetla), čímž by se dostalo do Slunce velmi rychle.

Tvrzení, že pro hod do Slunce je neefektivnější vyslání tělesa do nekonečna a následně zpomalení, je dokázáno v další podkapitole.

A nevyplatilo by se střílet šikmo?

Pojďme případ hození do Slunce vyřešit obecněji. Budeme se nyní zabývat jen bieliptickým manévřem, který je jednodušší a na teoretický popis nám bude stačit. Jiné typy manévřů zahrnují i konstrukci rakety, účinnost jejich motorů, která může záviset na jejich výkonu, a další parametry.

Máme těleso, které obíhá Slunce ve vzdálenosti R rychlostí v_0 . Rychlost si rozdělíme na tři vzájemně kolmé složky

- tečná – ve směru pohybu oběhu okolo Slunce
- radiální – ve směru od Slunce
- axiální – ve směru kolmém na rovinu oběhu

Počáteční rychlost je v tečném směru v_0 , v ostatních směrech je nulová. V okamžiku po výstřelu si složky označíme po řadě v_t, v_r, v_a . Těleso tak navedeme na eliptickou dráhu a v jejím aféliu ho zpomalíme tak, aby spadlo do Slunce. Poloměr Slunce je velmi malý v porovnání s poloměrem oběhu Země, jenž je menší, než hlavní poloosa vzniklé elipsy. Proto můžeme předpokládat, že těleso v aféliu úplně zastavíme. Pak začne padat přímo do středu Slunce.

Celá naše Δv spotřeba pak bude

$$\Delta v = v_A + \sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2 + v_a^2}, \quad (4)$$

kde v_A je rychlost v aféliu. Tuto spotřebu se snažíme minimalizovat.

Zamyslíme-li se nad tím, jak axiální rychlost ovlivňuje naší trajektorii, tak zjistíme, že jen „nakláni“ rovinu elipsy. Potom si stačí změnit souřadnou soustavu a pozorovat pohyb v rovině

nakloněné elipsy. Radiální složka v nové soustavě zůstane stejná, axiální složka je nulová a tečná složka je součet původní radiální a tečné

$$v'_t = \sqrt{v_t^2 + v_a^2}$$

Urychlili jsme-li těleso v axiálním směru, způsobili jsme tak jen náklon rotace a zvýšení tečné rychlosti. Stejně jako při výstřelu ze Sluneční soustavy ale víme, že se nám nevyplatí urychlovat těleso v axiálním směru. Dále tedy budeme počítat s $v_a = 0$. Taky si můžeme rozmyslet, že stačí uvažovat $v_t \geq 0$.

Budeme znovu vycházet ze zákona zachování momentu hybnosti a zákona zachování energie

$$\begin{aligned} v_t R &= v_A R_A, \\ v_t^2 + v_r^2 - 2K &= v_A^2 - 2K \frac{R}{R_A}, \end{aligned}$$

kde je vzdálenost v afeliu a v_A rychlost v afeliu. V ZZE jsme rovnou vypustili hmotnost tělesa a zavedli substituci $K = \frac{GM}{R}$. R_A můžeme z rovnic eliminovat

$$v_A^2 - 2K \frac{v_A}{v_t} - v_t^2 - v_r^2 + 2K = 0.$$

Důležité je, že náš model platí pro eliptický pohyb, tedy dodaná rychlost nesmí být větší než úniková. Vyjádříme v_A a dosadíme do (4)

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{K}{v_t} - \sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}, \\ \Delta v &= \frac{K}{v_t} - \sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K} + \sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2}, \end{aligned}$$

kde jsme při řešení kvadratické rovnice zvolili pouze menší řešení (s mínusem před odmocninou), druhé řešení by udávalo rychlost v periheliu (která je vyšší).

Hledáme minimum funkce Δv . Problém je v tom, že závisí na dvou nezávislých parametrech v_t a v_r . To uděláme pomocí parciálních derivací

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial v_r} &= -\frac{v_r}{\sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}} + \frac{v_r}{\sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2}} = 0, \\ \frac{v_r}{\sqrt{\frac{K^2}{v_t^2} + v_t^2 + v_r^2 - 2K}} &= \frac{v_r}{\sqrt{(v_t - v_0)^2 + v_r^2}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že jedno řešení je $v_r = 0$. Za v_0 můžeme dosadit \sqrt{K} a pokračovat v úpravách

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{K}{v_t} - v_t\right)^2 + v_r^2} &= \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_r^2}, \\ \left|\frac{K - v_t^2}{v_t}\right| &= |v_t - \sqrt{K}|, \\ \frac{|\sqrt{K} - v_t| |\sqrt{K} + v_t|}{v_t} &= |\sqrt{K} - v_t|, \\ v_t &= \sqrt{K} = v_0. \end{aligned}$$

Docházíme tedy k tomu, že pro $v_t = v_0$ je řešením podmínky nulové parciální derivace libovolné v_r . To odpovídá stavu, kdy těleso vystřelíme kolmo na původní kruhovou dráhu; dosazením do Δv vidíme, že $\Delta v = v_0$. Pro jiné v_t může minimum nastat jen pro $v_r = 0$ nebo maximální v_r (tedy výstřel do nekonečna, který jsme už vyřešili).

Zjistili jsme tedy, že je nejvýhodnější nestřílet „šikmo“ a těleso urychlovat pouze v tečném směru. Vztah pro Δv se nám znovu zjednoduší

$$\Delta v = \frac{K}{v_t} - \left| \frac{K}{v_t} - v_t \right| + |v_t - \sqrt{K}|.$$

Řešíme dva případy, $v_t < \sqrt{K}$ a $v_t > \sqrt{K}$. Pro $v_t < \sqrt{K}$ je afelium na původní dráze, proto tento případ nemusíme uvažovat. Pro $v_t > \sqrt{K}$ dostaneme

$$\Delta v = \frac{K}{v_t} + \frac{K}{v_t} - v_t + v_t - \sqrt{K} = \frac{2K}{v_t} - \sqrt{K}.$$

To znamená, že čím vyšší rychlost v_t , tím méně bude potřeba energie na manévry. Jsme ovšem omezeni podmínkou, že rychlost nesmí být vyšší, než je rychlost úniková, jinak náš model selže a může vycházet záporná Δv . Neefektivnější bude znovu výstřel do nekonečna.

Pojďme se ještě zamyslet nad tím, co kdybychom nepoužili bieliptický přesun, ale pouze bychom těleso z oběžné dráhy vystřelili tak, že perihelium jeho trajektorie bude uvnitř Slunce (resp. na jeho okraji ve vzdálenosti R_S , protože určitě bude výhodnější těleso zpomalit/urychlit tak, aby se dostalo na povrch Slunce, než někam dovnitř). Stejnou úvahou, jako v předchozím případě, dojdeme k tomu, že nemá smysl dodávat tělesu axiální složku rychlosti. Znovu vyjdeme z rovnic pro zákon zachování energie a momentu hybnosti

$$\begin{aligned} v_P^2 - 2K \frac{R}{R_S} &= v_t^2 + v_r^2 - 2K, \\ v_t R &= v_P R_S. \end{aligned}$$

Označíme poměr $R/R_S = r$ a eliminujeme rychlost v periheliu v_P

$$v_r^2 = v_t^2 r^2 - 2Kr - v_t^2 + 2K. \quad (5)$$

Dosadíme do vztahu pro Δv , který nyní nezahrnuje rychlost v_A , protože nepotřebujeme nikde brzdít

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_r^2}, \\ \Delta v &= \sqrt{(v_t - \sqrt{K})^2 + v_t^2 r^2 - 2Kr - v_t^2 + 2K} = \sqrt{v_t^2 r^2 - 2v_t \sqrt{K} + (3 - 2r)K}. \end{aligned}$$

Hledáme nyní takovou rychlost v_t , pro kterou je Δv nejmenší. Výraz pod odmocninou je kvadratická funkce, víme tedy, že minimum má pro $v_t = \sqrt{K} r^{-2} = v_0 r^{-2}$. Toto minimum je ale vždy záporné; podíváme-li se ale na rovnici (5), zjistíme, že není splněna podmínka řešitelnosti pro v_r (v_r^2 vychází taky záporné).

Fyzikální význam je takový, že ZZE určuje minimální možnou rychlost v periheliu a tedy i minimální možnou hodnotu tečné složky rychlosti; pokud zvolíme tečnou rychlost menší, neexistuje dráha s periheliem na povrchu Slunce. Rychlost v_t tedy musíme zvýšit z hodnoty $v_0 r^{-2}$ tak, aby v_r^2 bylo nezáporné. Protože minimalizujeme kvadratickou funkci, víme, že je optimální

zvýšit v_t minimálně, čímž dostaneme znovu $v_r = 0$. To je případ, který jsme počítali výše, kdy těleso pouze (tečně) zpomalíme a necháme ho spadnout po elipse.

Víme ale, že výhodnější zůstává stejně případ vyhození do nekonečna a ještě výhodnější vyhození do Hlavního pásu.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha II.5 ... skleněný déšť

7 bodů; průměr 4,00; řešilo 30 studentů

Dělník si na stavbu mrakodrapu přinesl vak se skleněnkami, aby se s nimi mohl pochlubit svým kolegům. A co se nestane – vak se vysype a kuličky padají skrze lešení směrem k zemi. Lešení se skládá z jednotlivých poschodí o výšce h . Podlaha každého poschodí se skládá ze stejných mříží, ve kterých díry zaujímají $k\%$ z celkové plochy mříže. Uvažujme zjednodušený model propadávání kuliček lešením, kdy, pokud kulička spadne na díru v lešení, tak projde bez ovlivnění, a pokud spadne na pevnou část mříže, tak se její rychlost sníží na 0 a ihned začne dále padat (tj. velikost kuliček je zanedbatelná vůči velikosti děr v lešení, kuličky se od lešení nijak neodráží a po dopadu na pevnou část mříže se ihned skutálí do díry a dále začínají padat). Nakonec neuvažujme ani potenciální srážky kuliček mezi sebou. Předpokládejte, že kuličky se z tašky sypou s konstantním hmotnostním průtokem Q . Jakou silou budou kuličky působit na každé patro lešení, až se situace ustálí? *Mírek chtěl převést Ohmův zákon do mechaniky.*

Patro, ve kterém dělník upustí kuličky, označíme číslem 0. Zároveň předpokládáme, že počáteční rychlost všech kuliček je nulová. Pro maximální rychlost kuličky v n tém patře (v žádném z předchozích pater se nezpomalila o lešení) potom platí rovnice

$$\begin{aligned}v_n &= gt_n, \\nh &= \frac{1}{2}gt_n^2,\end{aligned}$$

jejichž řešením je vztah $v_n = \sqrt{2ngh}$.

Každá kulička může v každém patře buď narazit na lešení, nebo propadnout dírou a pokračovat dál. To znamená, že její cestu až do n tého patra můžeme jednoznačně popsat pomocí řetězce jedniček a nul o délce $n - 1$. Například 0100 bude znamenat, že kulička v prvním patře propadla dírou, ve druhém narazila na mříž, ve třetím znovu propadla a ve čtvrtém také. Do n tého patra se tak každá kulička mohla dostat 2^{n-1} způsoby. Vydělme k stovkou; pravděpodobnost, že kulička propadne patrem, pak je k , zatímco pravděpodobnost, že narazí, je $(1 - k)$. Pro pravděpodobnost cesty do p tého patra ve tvaru 0100 tak platí $P(0100) = k(1 - k)k \cdot k = k^3(1 - k)$. V praxi to znamená, že cestou 0100 se vydá hmotnostní tok $Q_{0100} = P(0100)Q = k^3(1 - k)Q$.

Počet nul na konci zápisu cesty kuličky do n tého patra označíme d . V našem případě tedy platí $d(0100) = 2$. Odtud vidíme, že daná kulička, která dopadla do n tého patra touto cestou, narazila naposledy přesně v $(n - d - 1)$ tém patře. Její rychlost v n tém patře tedy bude v_{d+1} . Je zřejmé, že $d \in \langle 0, n - 1 \rangle$.

Jestliže kulička narazí, veškerá její hybnost se změní na nulu. Pokud tedy za čas t dopadnou na patro lešení kuličky s celkovou hmotností $m = Q't$ a rychlostí v , působí tím silou

$$F = m \frac{v}{t} = Q'v.$$

Hmotnostní tok pro kuličky popsané řetězcem i je rovný $Q' = QP(i)$.

Nyní už dokážeme popsat všechny možné cesty kuliček do n tého patra a víme, jaký hmotnostní tok jimi bude proudit. Zároveň umíme vyjádřit rychlost, kterou se dané kuličky budou pohybovat, a víme, jak z toho spočítat výslednou sílu. Ještě je potřeba dodat, že jen $(1 - k)$ kuliček se v n tém patře zastaví, takže celkovou sílu působící na dané patro můžeme spočítat sumou

$$F_n = Q(1 - k) \sum_{i \in M_{n-1}} P(i) v_{d(i)+1}, \quad (6)$$

kde M_{n-1} je množina všech řetězců jedniček a nul s délkou $n - 1$.

Tato suma obsahuje celkem 2^{n-1} sčítanců. Rozdělíme si je na n skupin tak, aby všechny členy v jedné skupině měly stejnou hodnotu d . Díky tomu můžeme člen v_{d+1} z každé skupiny vytknout a potom počítat jen sumu členů $P(i)$ v dané skupině. Všechny řetězce z jedné skupiny mají $n - 1$ číslic a končí na číslici 1, následovanou d nulami.¹⁰ To znamená, že ještě nemáme určených prvních $n - d - 2$ číslic. V každé skupině budou přítomny jejich všechny možné kombinace. Sumu všech členů z jedné skupiny tak můžeme vyjádřit výrazem

$$S(d) = v_{d+1} (1 - k) k^d \sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j), \quad (7)$$

který ovšem neplatí pro skupinu s $d = n - 1$. Ta obsahuje jen samé nuly, takže pro ni platí $S(n - 1) = v_n k^{n-1}$.

Připomeňme si, že množina M_{n-d-2} obsahuje všechny možné řetězce jedniček a nul o celkové délce $n - d - 2$. Pro každý řetězec j z této množiny potom platí $P(j) = k^\alpha (1 - k)^\beta$, kde α je počet nul v této sekvenci a $\beta = n - d - 2 - \alpha$ je počet jedniček v této sekvenci. Jestliže známe binomickou větu, neměla by nás překvapit rovnost

$$\sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j) = (k + (1 - k))^{n-d-2} = 1,$$

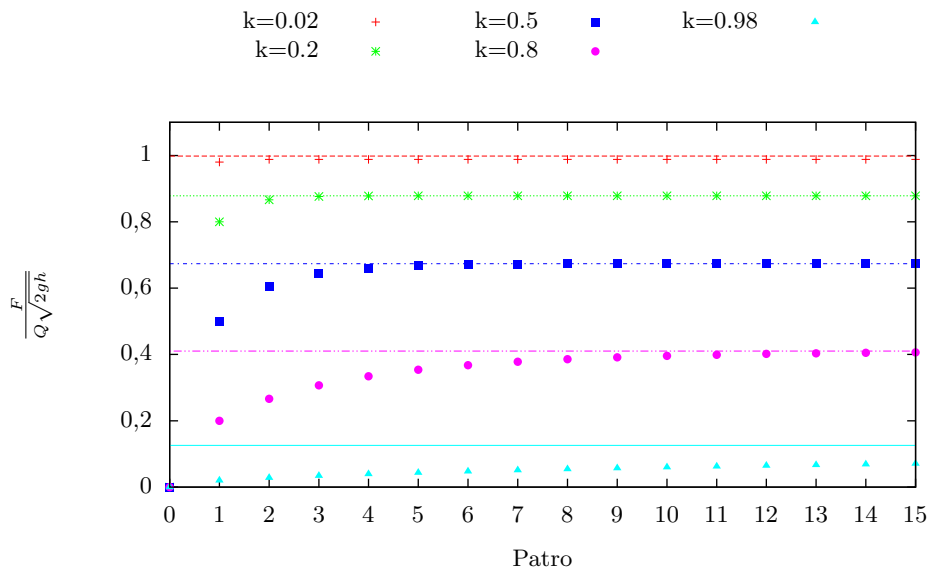
která nám umožní přepsat vzorec (7) do tvaru $S(d) = v_{d+1} (1 - k) k^d$ pro $d \neq n - 1$ a $S(n - 1) = v_n k^{n-1}$.

Všechny členy ze sumy ve vzorci (6) jsme si rozdělili do několika skupin podle d a poté jsme spočítali součet všech členů v každé této skupině. Celkovou sumu z (6) tak můžeme nahradit sumou těchto jednotlivých součtů a dostaneme

$$F_n = Q(1 - k) \sum_{d=0}^{n-1} S(d) = Q(1 - k) \left(v_n k^{n-1} + (1 - k) \sum_{d=0}^{n-2} v_{d+1} k^d \right)$$

$$F_n = Q\sqrt{2gh} (1 - k) \left(k^{n-1} \sqrt{n} + (1 - k) \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1} \sqrt{i} \right).$$

¹⁰S výjimkou skupiny s $d = n - 1$, ve které je jen jeden řetězec tvořený samými nulami.



Obr. 1: Síla působící na jednotlivá patra pro různé hodnoty k . Vodorovné přímky ukazují teoretickou hodnotu, ke které síla konverguje v nekonečném patře.

Tento vzorec je řešením úlohy, protože sumu v něm obsaženou už není možné dále zjednodušit¹¹.

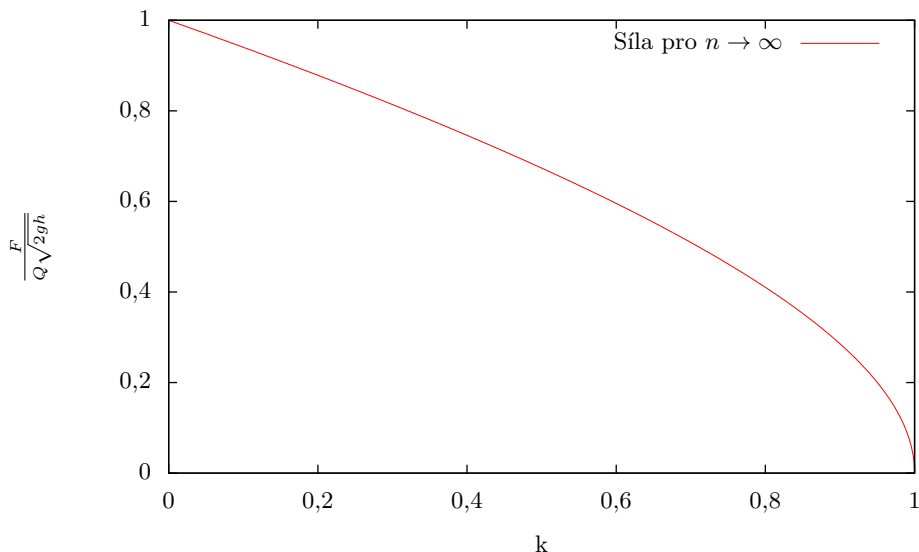
Ačkoli se to na první pohled nezdá, tento výsledek je velmi intuitivní a dává smysl: první člen v závorce je případ, kdy kulička ani jednou nenarazí a dopadne až na $nté$ poschodí. Její hybnost je tedy úměrná \sqrt{n} . Druhý člen představuje případy, ve kterých kulička padá přímo z výšky i nad $ntým$ poschodím. Aby spadla z výšky i , musela překonat $i - 1$ poschodí (proto se v sumě vyskytuje činitel k^{i-1}) a dopadnout na poschodí předtím, z čehož máme $(k - 1)$. Její hybnost je potom úměrná \sqrt{i} . Pro kontrolu, pokud ze závorky vypustíme členy s odmocninami (takže nebudeme počítat součet hybností, ale jen součet hmotností), dostaneme v závorce výraz

$$k^{n-1} + (1 - k) \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1} = k^{n-1} + (1 - k) \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} = 1.$$

To je ale jen jinak vyjádřený fakt, že se na $nté$ poschodí (a tím pádem na každé poschodí) dostanou všechny kuličky.

Můžeme si všimnout další zajímavé skutečnosti – pro velká n suma konverguje ke kladnému reálnému číslu, zatímco výraz $k^{n-1}\sqrt{n}$ konverguje k nule. Díky tomu se i F_n blíží k nějaké

¹¹ lze ji pouze vyjádřit pomocí speciálních funkcí



Obr. 2: Síla působící na patro $n \rightarrow \infty$ pro různé hodnoty k .

konkrétní hodnotě, což je přesně to, co bychom z fyzikálního hlediska čekali. Tohoto chování si můžeme všimnout v grafu 1 pro různé hodnoty k .

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha II.P ... ó Oganesson

10 bodů; průměr 5,26; řešilo 57 studentů

Jaké vlastnosti má 118. prvek periodické soustavy prvků? Respektive jaké by asi měl, kdyby byl stabilní? Diskutujte alespoň tři fyzikální vlastnosti. Karel chtěl zadat něco na extrapolaci.

Úvod, radioaktivita, elektronová konfigurace a reaktivita Og

Přestože Wikipedie není nezpochybnitelným zdrojem informací, ohledně základních informací o 118. prvku pro nás bude tato encyklopedie dostatečná.^{12,13} Prvek s protonovým číslem 118 již byl oficiálně objeven. Nicméně i tak se o něm mnoho neví, protože jeho objev byl potvrzen v roce 2015 na základě potvrzených a naměřených rozpadů tří (možná čtyř) atomů tohoto prvku z roku 2006. V roce 2016 pak bylo vybráno jméno pro tento prvek – oganesson – se značkou Og. Je pojmenován po ruském jaderném vědci Juriji Colakovičovi Oganessianovi. Vzhledem k tomu,

¹² *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Oganesson* [online]. c2017 [citováno 16. 10. 2017]. Dostupný z WWW: <<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Oganesson&oldid=14661315>>

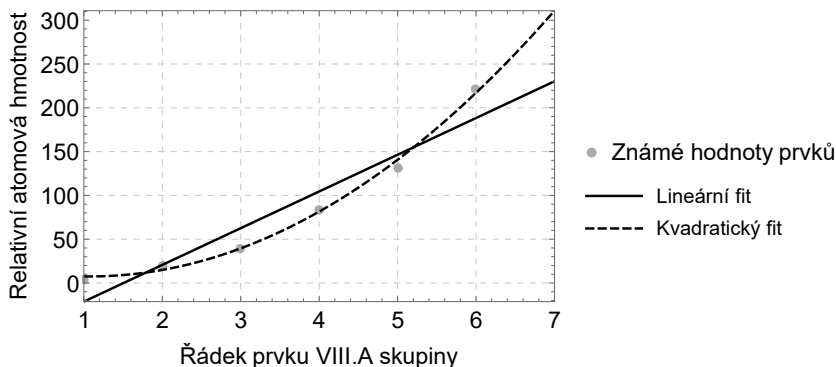
¹³ *Wikipedia, The Free Encyclopedia: Oganesson* [online]. c2017 [citováno 16. 10. 2017]. Dostupný z WWW: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Oganesson&oldid=805672099>>

že tento prvek patří do posledního sloupce tabulky, mělo by se jednat o vzácný plyn. Minimálně vzácný opravdu je. O tom, jestli by to byl plyn, se budeme bavit dále.

Naměřený izotop měl 294 nukleonů. Pokud bychom se zajímali o různé další odhady toho, jaké prvky by mohly být stabilní a jaká jejich nukleonová čísla by mohla být vhodná, pak bychom teoreticky mohli čekat, že by mohly být takto těžké prvky stabilnější, pokud by měly vyšší počet neutronů; existují ale modely, dle kterých je nejstabilnější izotop oganessonu skutečně ten s 294 nukleony. Tyto izotopy se zatím nějak nepodařilo naměřit, takže jde zatím pouze o nepotvrzenou teorii. Nicméně hned atomová hmotnost by mohla být zajímavou fyzikální vlastností k prozkoumání.

Ještě hned na úvod můžeme uvést, že když daný prvek patří do VIII.A skupiny, tak bychom očekávali, že bude mít zaplněnou valenční elektronovou slupku a jeho elektronová konfigurace by měla být $5f^{14} 6d^{10} 7s^2 7p^6$. Tím pádem by měl být obecně málo reaktivní, i když na druhou stranu by měl být pravděpodobně nejvíce reaktivní z celé skupiny. To plyne z toho, že čím dále jsou elektrony od jádra, tím slaběji jsou vázány, a tak mohou těžší prvky VIII.A skupiny snadněji vstupovat do reakcí. Taky bude nejsnazší jej ionizovat.

Snadno také můžeme tipovat, že bude radioaktivní, a to ve všech izotopech. Prvek s nejvyšším protonovým číslem, který má stabilní izotop, je olovo s protonovým číslem 82. Ještě bismut¹⁴ je hodně stabilní se svým izotopem 209, ve kterém se vyskytuje v přírodě a jehož poločas rozpadu je delší než stávající stáří vesmíru.



Obr. 3: Extrapolace relativní atomové hmotnosti Og – dle periody

Pro naše extrapolace budeme využívat program Wolfram Mathematica 11.0.1.0 a údaje o prvcích budeme získávat přímo z knihovny ElementData.¹⁵ Tato knihovna obsahuje hodnoty

¹⁴ *Wikipedia: Otevřená encyklopedie: Bismut* [online]. c2017 [citováno 18. 10. 2017]. Dostupný z WWW: <<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Bismut&oldid=15391054>>

¹⁵ ElementData Source Information: ElementData is based on a wide range of sources, with enhancement at the Wolfram Research Companies by both human and algorithmic processing. Among principal sources for ElementData are:

- Atomic Mass Data Center. *NUBASE*. 2003.
- Barbalace, K. *Periodic Table of Elements*. 2007.
- Cardarelli, F. *Materials Handbook: A Concise Desktop Reference*. Springer, 2000.
- Lide, D. R. (Ed.). *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. 87th ed. CRC Press, 2006.
- Speight, J. *Lange's Handbook of Chemistry*. McGraw-Hill, 2004.
- United Kingdom National Physical Laboratory. *Kaye and Laby Tables of Physical and Chemical*

známých veličin pro jednotlivé prvky a je tedy praktické, že přímo v programu, ve kterém probíhají extrapolace, můžeme snadno tyto údaje využít. Účastníci samozřejmě mohli využít jiné vhodně dostupné zdroje. Program Wolfram Mathematica je sice pro běžného středoškoláka drahý, ale je možné, alespoň částečně, využívat jeho funkcí v rámci webu WolframAlpha.¹⁶ Bohužel je u něj omezení na výpočetní složitost, takže při jeho využití pravděpodobně musíte údaje o prvcích nalézt jinde a také vám asi nepůjde snadno naformátovat nějaký graf. Nebo lze využít zcela jiné programy či získat údaje o prvcích a ty až následně zpracovat například v Excelu nebo jiném tabulkovém procesoru.

Pro ověřitelnost a opakovatelnost výsledků přikládáme odkazy na soubory, ve kterých jsou použité příkazy,¹⁷ a to jak ve formátu nb, tak cdf, který se dá případně alespoň zdarma zobrazit pomocí Wolfram CDF Player. Nicméně zde nejsou žádné interaktivní prvky (Manipulate), takže jde pak pouze o statické grafy.

Pro různé fyzikální vlastnosti bude různě účelné vycházet z hodnot buď na základě přímo protonového čísla nebo periody (čísla řádku), ve které daný prvek vyskytuje. Logicky pokud se budeme zajímat o atomovou hmotnost, tak bude spíše rozhodující protonové číslo. Pokud se ale zajímáme o nějaké chemické či fyzikálně chemické vlastnosti, tak se stává potenciálně zajímavější číslo periody, ve které se daný prvek nalézá. My budeme provádět pouze jednoduché odhady vlastností prvku 118 na základě známých fyzikálních vlastností jiných prvků, a to jednoduchou extrapolací, tedy proložením rozumnou funkcí. Nebudeme tedy uvažovat nějaké složitější fyzikální modely na vysokoškolské úrovni, spíše se budeme snažit prokládat hodnoty grafu nějakými rozumnými závislostmi a na základě toho tak trochu tipovat. I takto jednoduchý postup nám může dát často dostatečně dobré výsledky např. na to, aby mohlo být provedeno přesnější měření. Tedy v principu, pokud je daný prvek/sloučenina dost stabilní na to s ním něco naměřit. Musíme ale mít na paměti, že se může stát, že závislost, která do nějaké doby byla např. lineární, se pak prudce změní kvůli tomu, že se začne projevovat nějaký nový fyzikální jev.

Prokládat se budeme snažit co nejjednoduššími závislostmi, protože povětšinou máme velice málo dostupných bodů. Pokud se budeme zajímat pouze o prokládání v rámci vzácných plynů, pak budeme mít maximálně 6 hodnot předcházejících prvků (dle protonových čísel: 2 – helium, 10 – neon, 18 – argon, 36 – krypton, 54 – xenon, 86 – radon). Pro některé fyzikální vlastnosti, jako například pro teplotu tuhnutí, pak budeme mít těchto bodů i méně, protože například helium (alespoň za normálního tlaku) netuhne a radon není stabilní, ale podléhá radioaktivnímu rozpadu.

Naše metoda bude tím pádem opravdu relativně prostá. Budeme se prostě dívat na data, snažit se odhadnout, jestli nám na ně „dobře sedí“ lineární či kvadratická závislost, a to ještě jestli nám sedí líp na protonová čísla nebo index řádku prvku.

Constants. 2007.

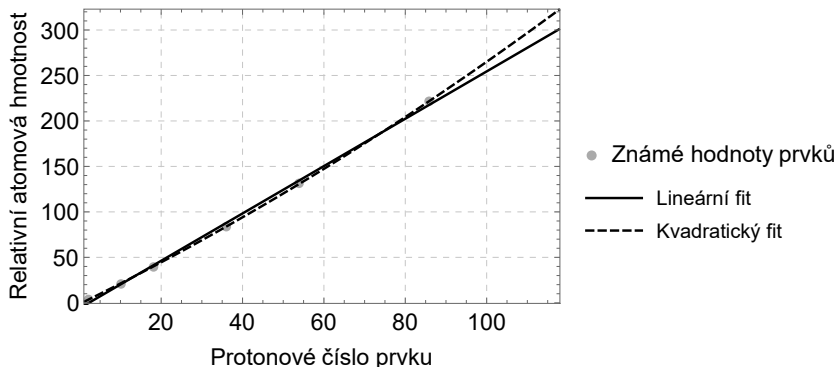
- United States National Institute of Standards and Technology. *Atomic Weights and Isotopic Compositions Elements.* 2005.
- United States National Institute of Standards and Technology. *NIST Chemistry Webbook.* 2005.
- Winter, M. *WebElements.* 2007.

¹⁶<http://www.wolframalpha.com/>

¹⁷https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/problem-2p.nb,
https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/problem-2p.cdf

Relativní atomová hmotnost Og

Vraťme se k určování relativní atomové hmotnosti oganessonu a ukažme si, co jsme mysleli tou extrapolací. V grafu na obrázku 3 vidíme relativní atomové hmotnosti prvků VIII.A skupiny v závislosti na periodě, na obr. 4 pak v závislosti na jejich protonovém čísle a v tomto případě na obr. 5 vidíte i data v závislosti na protonovém čísle za všechny prvky. U této vlastnosti oganessonu je ovšem taková výjimka, že je již v datech ElementData odhadnutá, a to na 294. Tím se ovšem nenecháme připravit o tu zábavu s odhadováním a zkusíme si to ukázat právě na tomto příkladu. Navíc u jiných vlastností nám to už tato knihovna nepokazí, protože skoro žádné jiné vlastnosti Og v ní nejsou definované.



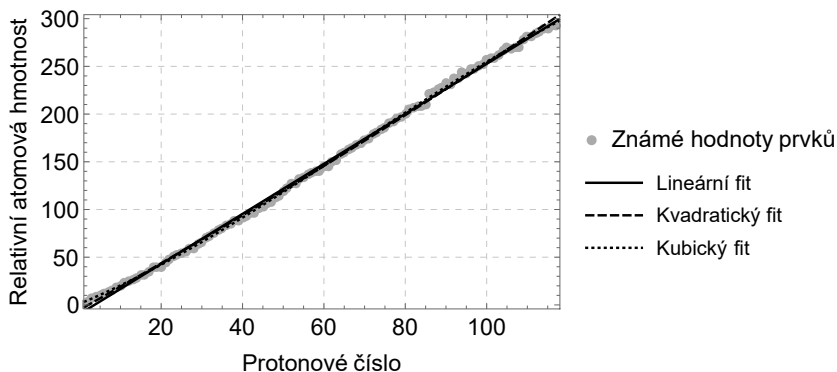
Obr. 4: Extrapolace relativní atomové hmotnosti Og – dle protonových čísel prvků VIII.A

Pokud bychom se podívali na nějaké číslo, které nám může říci něco o tom, jak moc dobře data sedí na náš model, tak budeme využívat funkci AdjustedRSquared, kterou budeme značit dále R . Tato funkce nám zhruba říká to, jak moc daleko máme data od proložené křivky. Pokud by data ležela na přímce a my jsme je proložili přímkou, dostaneme $R = 1$. Pokud jsou data rozházená, dostáváme menší hodnoty a snažíme se přiblížit té 1, které ale v principu nemůžeme dosáhnout.¹⁸ Nicméně ani toto číslo nám neřekne, jestli je odhad správný. Pokud bude ale hodně vzdálené od 1, tak nám to říká, že náš odhad nebude přesný.

Vidíme, že u obr. 3 data vůbec nesedí na přímkou a na parabolu také moc nesedí. Je tam vidět to, že střídavě je hodnota pod a nad křivkou, což si dokážeme vysvětlit právě tím, že rozestupy mezi těmi prvky jsou nestejně (podívejte se na periodickou soustavu prvků). Pokud bychom se podívali na hodnoty kvadratického fitu v řádku 7, odpovídalo by to relativní atomové hmotnosti 311 s $R = 0,995$. Vzhledem k tomu, že se nám tam střídají ty data nad a pod křivkou, tak si docela jistě ještě můžeme říci, že jsme tímto relativní atomovou hmotnost nadhodnotili.

U grafu na obr. 4 už data sedí daleko lépe. Nicméně nám to naopak možná ukazuje, že i když formálně bude lépe sedět kvadratický fit, tak někdy nám ten lineární dá možná lepší extrapolovanou hodnotu. Důvodem je, že kvadratická funkce má o jeden volný parametr víc, máme tedy větší šanci se s ní trefit na naměřená data; pro libovolná data dokonce můžeme najít polynom vysokého řádu, který všemi body přesně prochází, ale mezi nimi se prudce mění.

¹⁸Kvůli nepřesnostem měření, kvůli tomu že nebudeme fitovat přesně tu funkci, podle které se daná fyzikální veličina řídí atd.



Obr. 5: Extrapolace relativní atomové hmotnosti Og na základě všech prvků

Lineární fit má $R = 0,998$ a kvadratický $R = 0,99994$. Hodnota relativní atomové hmotnosti by podle lineární extrapolace byla 301, kdežto podle kvadratické 323.

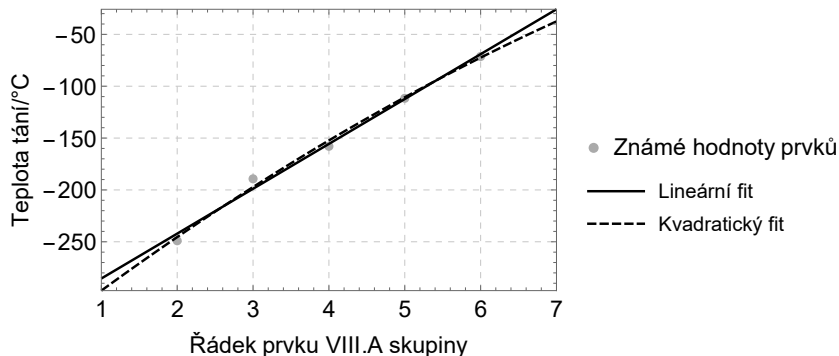
Když se do třetice podíváme na graf na obr. 5, pak dostáváme hodnoty pro jednotlivé fity: lineární 300 ($R = 0,998$), kvadratický 304 ($R = 0,9989$) a kubický 298 ($R = 0,9996$). V tomto případě si můžeme dovolit i ten kubický fit a bude dokonce pro naše využití nejlepší, protože máme hodně dat uvnitř našeho souboru a extrapolujeme těsně za jeho hranici.

Z výše uvedených grafů a hodnot bychom tedy asi vybrali jako nejpravděpodobnější hodnotu relativní atomové hmotnosti Og jako 298. To se sice přesně neshoduje s 294, které jsou předpokládány, ale jde o relativně blízký odhad. Hned si díky tomu musíme uvědomit, že naše další odhady nebudou úplně přesné. Je ovšem zajímavou informací, že se čeká, že jistě těžší prvky a možná i těžší izotopy oganessonů budou stabilnější, nicméně zatím se je nepodařilo připravit.¹⁹

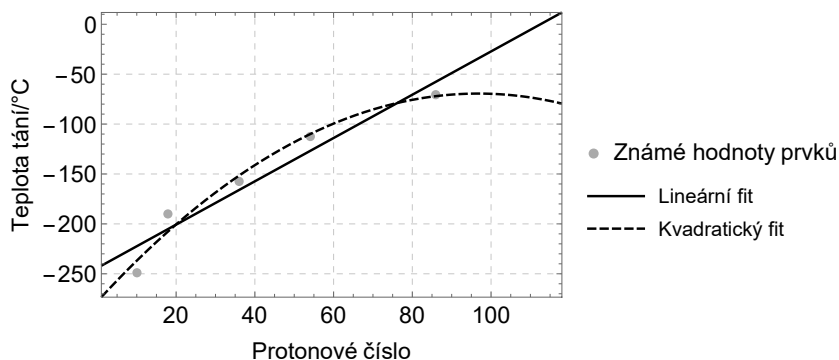
Teplota tání a tuhnutí Og

Dále se můžeme zabývat například teplotou tání. Jak jsme již zmínili, tak přijdeme o helium jako jeden z bodů, ale budeme se zabývat pouze pěti ostatními vzácnými plyny. Teplota tání už přeci jen trochu více souvisí s „chemií“ daného prvku, tedy s elektronovým obalem viz srovnání v grafech na obr. 6 a 7. Proto je také lépe vidět nějaká jednoduchá závislost z grafu, který je vytvořen v závislosti na periodě, ve které se prvek nachází (obr. 6). V grafu na obr. č. 7 naopak vidíme, že nám dává lineární a kvadratický odhad výrazně jiné výsledky, což tak trochu ukazuje, že odhad dle protonového čísla není úplně vhodný. Pokud graf v obr. 6 proložíme přímkou, dostáváme teplotu tání -26 °C ($R = 0,99$), pro kvadratické proložení dostáváme -39 °C ($R = 0,99$). Vzhledem k tomu, že se spolehlivost příliš neliší, bude pravděpodobně přesnější lineární odhad. Pokud bychom se podívali na nějaké další pravidelnosti, pak naměřená teplota tání je nejprve pod přímkou, pak nad, pak pod, zase mírně nad a nakonec opět pod. Z toho by se dalo usoudit, že pro Og možná bude opět mírně nad a na základě tohoto „věštění z křišťálové koule“ bychom mohli říci, že bude kolem -20 °C .

¹⁹ Wikipedia: Otevřená encyklopedie: Ostrov stability [online]. c2017 [citováno 18. 10. 2017]. Dostupný z WWW: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Ostrov_stability&oldid=14776718>



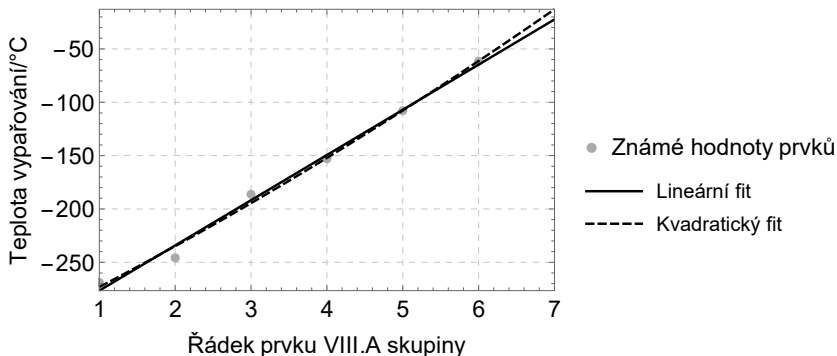
Obr. 6: Extrapolace teploty tání Og – dle periody prvku



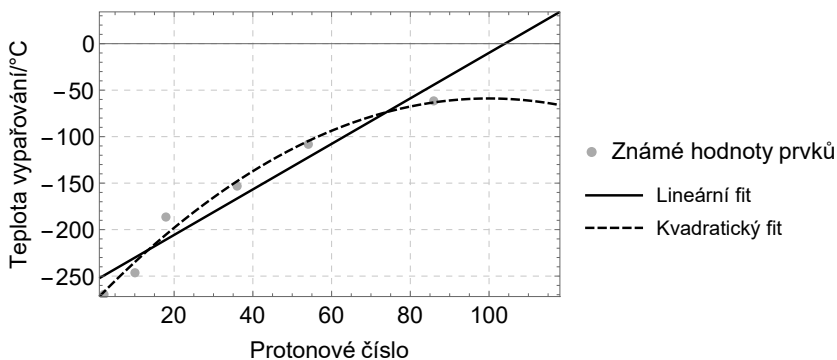
Obr. 7: Extrapolace teploty tání Og – dle protonových čísel prvků

Podobnou vlastností jako teplota tání je teplota varu. Tak se hned podívejme, jak to bude s teplotou varu viz obr. 8 a 9. Helium nám alespoň kapalní, takže se nám do našich úvah opět vrací. Opět budeme brát jako důležitější periodu daného prvku. Pokud si to tedy proložíme přímkou dostáváme teplotu varu oganessonu -22 °C ($R = 0,99$) s lineárním proložením, respektive -14 °C ($R = 0,99$) s kvadratickým proložením. Tentokrát bude jistě rozumnější vzít lineární proložení, a to prohlásit za náš odhad.

Co kdybychom se ale chtěli zajímat o nějakou „složenu“ dvou fyzikálních vlastností? Hned první, která by nás mohla napadnout, by mohl být rozdíl mezi teplotou tání a teplotou varu. To je zajímavá vlastnost, protože například široké rozpětí kapalně vody umožňuje život na Zemi. Vlastnost se ale pro nás ukáže až tak zajímavou, že z toho nedokážeme nic odhadnout. Proč? Protože pro neon je to $2,5\text{ K}$, pro argon $3,5\text{ K}$ a krypton $4,1\text{ K}$. To by bylo ještě dobré, ale pak nám tento rozdíl klesne na $3,8\text{ K}$ u xenonu a zase docela dramaticky vzroste na $9,3\text{ K}$ u radonu. Takže z těchto málo bodů se dá říci, že se závislost nedá nijak jednoduše odhadnout (maximálně bychom mohli čekat, že půjde řádově o jednotky kelvinů) a ukazuje to, že nějaké složitější vlastnosti asi půjde odhadnout jenom velice špatně. Proložené křivky, jejichž výsledné



Obr. 8: Extrapolace teploty vypařování Og – dle periody



Obr. 9: Extrapolace teploty vypařování Og – dle protonových čísel prvků

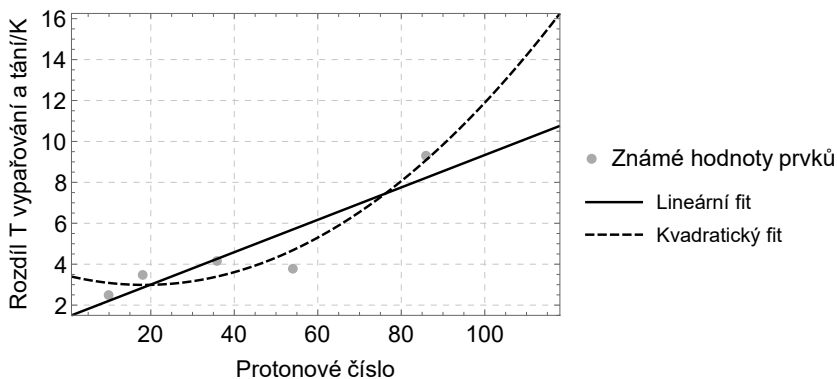
hodnoty ani neuvádíme, můžete vidět jako ukázkou v grafu na obr. č. 10.

Co srovnání se současnými teoriemi? Vypadá to, že se právě u tohoto prvku už má nejspíše začít projevovat „nová fyzika“, protože podle jednoho článku²⁰ by teplota varu měla být kolem 80 °C s tím, že při pokojové teplotě by tento prvek měl být pevný. Nicméně jsou to také zatím pouze neověřené teorie.

Hustota

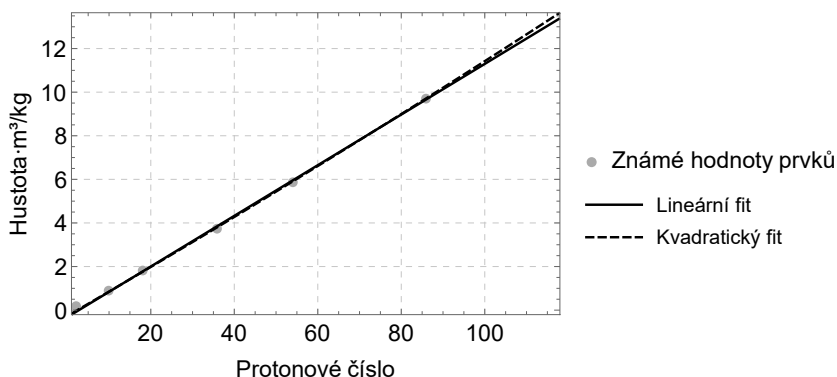
Sice je možné, že oganesson by byl pevná látka, nicméně my zkusíme odhadnout, jakou by měl hustotu, byl-li by to plyn za standardních podmínek. Hustotu bychom mohli odhadnout také z již odhadnuté relativní atomové hmotnosti a z rovnice pro ideální plyn, ale my to opět zkusíme na základě extrapolace známých hodnot. Tentokrát rovnou vybereme variantu, kde prokládáme hodnoty hustot plynů, kde na ose x máme protonové číslo prvku. Hustota jednoatomového plynu za standardních podmínek bude opravdu spíše odpovídat hmotnosti jednotlivých atomů

²⁰Nash, Clinton S. (2005). *Atomic and Molecular Properties of Elements 112, 114, and 118*. Journal of Physical Chemistry A. 109 (15): 3493–3500. doi:10.1021/jp050736o. PMID 16833687.



Obr. 10: Extrapolace rozdílu teploty vypařování a tání Og – dle protonových čísel prvků

než řádku periodické tabulky. Graf vidíme na obrázku 11. Vidíme, že na data velice dobře sedí už samotná přímka. Pro lineární fit dostáváme odhad $\rho = 13,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a pro kvadratický fit je to $13,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. U obou fitů dostáváme velice vysoké R blížící se 1. Vzhledem k tomu, že některé hustoty vzácných plynů známe jenom na dvě platné cifry, tak bychom měli prohlásit, že hustotu Og bychom čekali mezi $13 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $14 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. To by platilo, pokud by Og netvořil víceatomové molekuly a byl jednoatomovým plynem. Pokud by tvořil dvouatomové molekuly (což asi nemůžeme úplně vyloučit, i když je ve sloupci vzácných plynů), pak by jeho hustota byla zhruba dvojnásobná. Pokud by tedy Og byl stabilní a byl to plyn, tak by za standardních podmínek byl nejhustším plynným prvkem a jednou z nejhustších plynných látek vůbec.



Obr. 11: Extrapolace hustoty Og jako plynné látky za standardních podmínek

Komentáře k došlým řešením

Za motivační úvod, kde jste popsali, po kom je prvek pojmenovaný a že je radioaktivní či jak byl připraven, jsme body nedávali (max 1), protože to nebylo cílem úlohy. Hlavním úkolem mělo být

odhadnout nějaké vlastnosti a pro získání plného počtu bodů je odhadnout na základě vlastností jiných prvků a také kvantitativně (číselně) a ne pouze kvalitativně (popisně). Nemohli jste to zachránit ani uvedením více vlastností.

Velkou chybou, která se opakovala docela často, bylo, že jste neuváděli zdroje informací, ze kterých jste vycházeli. Je potřeba uvádět citace a je potřeba citovat i v těch místech, kde dané údaje využíváte.

Častou chybou bylo nijak nepodložené tvrzení „je ve skupině vzácných plynů a proto je to plyn“. To je podobné prohlášení „všechny kovy jsou za standardních podmínek pevné látky“, což sice většinou platí, ale rtuť je výjimka a tak nějak kolem ní ani v periodické tabulce nejsou další kapalně prvky. Také někdo hodně utíkal do chemie, což nebylo úplně negativní, ale pokud popisujete jenom to, že bude reaktivnější, bude tvořit oxidy a jaké látky a jaké vlastnosti budou mít ty sloučeniny, tak na to otázka také úplně necílila.

Na druhou stranu bylo možné dostat body za zdůvodnění, proč si myslíte, že půjde o plyn i o pevnou látku; že půjde o kov nebo nekov; pokud jste měli vnitřně konzistentní řešení. Ale je divné, pokud jednou napíšete, že jde o plyn a hned, že jde o pevnou látku a nijak to nevysvětlíte.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha II.E ... sypek

12 bodů; průměr 10,45; řešilo 47 studentů

Změřte sypaný úhel alespoň 2 látek běžně používaných v kuchyni (např. mouka, cukr, sůl apod.).

Michal se málem sesypal.

Teória

Ako je dobre známe, nasypaná látka vytvorí kužeľ s uhlom sklonu stien (voči vodorovnej rovine) α – to je hľadaný sypaný uhol. Na stenu kužeľa sa môžeme pozrieť ako na naklonenú rovinu s koeficientom trenia μ ; z rovnováhy medzi tiažovou a trecou silou pre vrchnú vrstvu látky dostávame známy vzťah

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nejde o úplne realistický model, lebo zrnká môžu držať aj v strmšom kuželi, ak sa na seba vhodne „naskladajú“, teda ak zapadnú do dier medzi inými zrnami tak, že nedržia iba kvôli treniu. Dalo by sa teda čakať, že látka s drsnejšími alebo väčšími zrnami bude mať sypaný uhol väčší.

Postup pri experimente

Sypaný uhol budeme merať pre nasledujúce látky: hladká múka, hrubá múka, (kryštalový) cukor, soľ, mak.

Danú látku N krát ($N = 10$) nasypeme na rovný tanier z č. najmenšej výšky a jemne zatrasíme. Výsledný kužeľ z boku odfotíme, na strany kužeľa na fotke nakreslíme priamky a nájdeme uhly, ktoré zvierajú s vodorovnou osou. Zo všetkých $2N$ hodnôt pre ľavé a pravé strany kužeľov vypočítame priemerný uhol $\bar{\alpha}$ a jeho štandardnú odchýlku (štatickú) podľa vzťahu

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2N} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{2N(2N - 1)}}.$$

Tab. 1: Nameraný sklon stien nasypaného kužela.

i	hl. múka		hr. múka		cukor		soľ		mak	
	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$
1	34,5	45,0	40,1	37,5	41,2	41,7	42,2	45,3	40,9	38,2
2	47,8	43,5	38,7	35,2	43,3	37,3	44,1	41,5	40,8	40,1
3	48,6	41,7	37,8	39,6	41,8	39,6	42,7	41,0	38,4	38,1
4	41,1	48,4	39,9	38,3	46,7	39,2	40,2	40,0	38,6	39,2
5	49,1	48,8	38,8	38,0	35,4	44,0	41,2	36,5	40,3	38,4
6	46,0	43,5	43,9	39,0	42,9	41,3	36,6	40,8	37,2	38,8
7	56,4	54,1	37,6	38,4	41,1	39,7	40,4	37,7	38,9	36,5
8	57,5	52,2	37,5	38,0	41,9	40,3	39,9	41,4	37,6	36,1
9	49,8	47,5	38,0	37,0	38,9	41,8	47,3	35,0	42,6	37,5
10	50,0	49,5	38,4	40,8	40,6	40,3	39,7	39,6	37,7	38,4
$\bar{\alpha}$	48°		38,6°		41,0°		40,7°		38,7°	
σ_A	1°		0,4°		0,6°		0,7°		0,4°	

Odhadneme systematickú chybu jedného merania $\Delta\alpha$, z ktorej vypočítame štandardnú odchýlku (systematickú)

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{2N}} \Delta\alpha;$$

celkovú štandardnú odchýlku potom vypočítame podľa vzťahu

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Výsledky merania

V tabuľke 1 je uvedený nameraný uhol α pre jednotlivé látky spolu s priemerom. Na obr. 12 až 16 sú fotky kôpok použitých pri experimentoch.

Chybu určenia uhla α odhadneme na $0,5^\circ$. Potom je systematická odchýlka priemeru rovná $\sigma_B \doteq 0,1^\circ$; vidíme, že je oproti štatistickej zanedbateľná, celková odchýlka teda bude približne rovná štatistickej.

Diskusia

Nameraný uhol α môže byť väčší ako skutočný kvôli naskladaniu zrníek. Kužel nasypanej látky by mal byť ale stabilný aj pri ľubovoľnom menšom uhle, čo sa prejaví hlavne v prípade, že sypeme z väčšej výšky a padajúce zrnká majú dostatočnú kinetickú energiu na to, aby sa zosypali nižšie.

Ďalej experiment ovplyvňuje to, že nevznikne dokonalý kužel – nedá sa sypať presne z jedného bodu, pri podstave a vrchole bude kužel viac zaoblený kvôli padajúcim zrnkám a všeobecne bude nepravidelný tam, kde sa zrnká viac naskladajú na seba. Určiť presne povrch kužela je tiež problém kvôli rozmerom zrníek.

Prípadný sklon fotografie eliminujeme tým, že sčítavame uhly pre pravú a ľavú stenu kužela. Na meranie ale vplýva to, že pri fotení z konečnej diaľky alebo nedokonale z boku neodfotíme presne prierez kužela.

Tab. 2: Sypný uhol jednotlivých látok.

látka	sypný uhol
hladká múka	$(48 \pm 1)^\circ$
hrubá múka	$(38,6 \pm 0,4)^\circ$
cukor	$(41,0 \pm 0,6)^\circ$
soľ	$(40,7 \pm 0,7)^\circ$
mak	$(38,7 \pm 0,4)^\circ$

Pri hladkej múke sa objavuje ten problém, že ľahko tvorí hrudky, ktoré sa vedia nakopiť do dost veľkej výšky. Tento efekt, na menšej škále, efektívne vytvára väčšie a nepravidelné zrná, aj keď samotné častice múky sú veľmi malé a pravdepodobne guľové. To spôsobuje, že je sypný uhol vcelku vysoký a ťažko sa meria (steny kužela sú dosť nepravidelné). U ostatných meraných látok to nepozorujeme, napr. pri práškovom cukre áno. Pravdepodobne sú hrudkovité len veľmi jemné látky.

Vidíme tiež, že pre mak a hrubú múku je sypný uhol veľmi podobný – v rámci odchýlky merania rovnaký – a pre cukor a soľ je tiež dosť podobný. Podobnosť medzi týmito dvojicami je v tvare zrn (mak a hrubá múka majú vcelku guľový tvar, cukor a soľ sú kryštalické); na druhej strane veľkosť zrn nemá na použitých látkach pozorovateľný vplyv.

Ďalším nežiaducim efektom je vlhkosť, ktorá by mala zvýšiť sypný uhol, je ale ťažké odhadnúť o koľko. Použitá soľ bola dosť navlhnutá, ostatné látky boli suché.

Záver

Nameraný sypný uhol pre jednotlivé látky je uvedený v tabuľke 2.

Použité látky s podobným tvarom zrn sa správajú podobne, veľkosť zrn nie je veľmi podstatná. Veľmi jemné látky, ktoré vytvárajú hrudky, budú mať zasa veľký sypný uhol.

Treba podotknúť, že žiadne závery o správaní sypného uhla podľa vlastnosti látky nevieme vyvodiť s istotou – použitých látok je príliš málo.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz



Obr. 12: Kôpka hladkej múky.



Obr. 13: Kôpka hrubej múky.



Obr. 14: Kôpka cukru.



Obr. 15: Kôpka soli.



Obr. 16: Kôpka maku.

Úloha II.S . . . derivace a Monte Carlo integrace

10 bodů; průměr 7,63;

řešilo 16 studentů

a) Vykreslete závislost chyby na velikosti kroku pro metodu

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + f(x-2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h)}{12h}$$

odvozenou pomocí Richardsonovy extrapolace v textu seriálu. Jaký je optimální krok a minimální chyba? Porovnejte s centrovanou a dopřednou diferencí. Jako derivovanou funkci použijte $\exp(\sin(x))$ v bodě $x = 1$.

Bonus Vypočtete pro tuto metodu teoretickou velikost optimálního kroku pomocí odhadu chyb.

b) Na webu se nachází soubor s experimentálně zjištěnými t , x a y souřadnicemi poloh hmotného bodu. Pomocí numerické derivace nalezněte časovou závislost složek rychlosti a zrychlení a vynesete obě závislosti do grafu. Jaký fyzikální děj bod nejspíše konal? Numerickou metodu si zvolte sami, svoji volbu ale odůvodněte.

Bonus Existuje v tomto případě přesnější varianta získání rychlosti a zrychlení, než přímočará aplikace numerické derivace?

c) Máme zadán integrál $\int_0^\pi \sin^2 x dx$.

1. Nalezněte hodnotu integrálu z geometrické úvahy za pomoci Pythagorovy věty.

2. Nalezněte hodnotu integrálu pomocí Monte Carlo simulace. Určete směrodatnou odchylku výsledku.

Bonus Vyřešte Buffonovu úlohu ze seriálu (odhad hodnoty čísla π) pomocí MC simulace.

d) Nalezněte vztah pro výpočet objemu šestidimenzionální koule pomocí metody Monte Carlo. *Nápověda* Pythagorovu větu lze využít k měření vzdáleností i ve vyšších dimenzích.

Mirek a Lukáš čtou dokumentaci k Pythonu.

a) Abychom měli chybu podle čeho určovat, potřebujeme znát analyticky vyjádřenou derivaci testovací funkce.²¹ Z pravidla o derivaci složené funkce snadno zjistíme, že platí

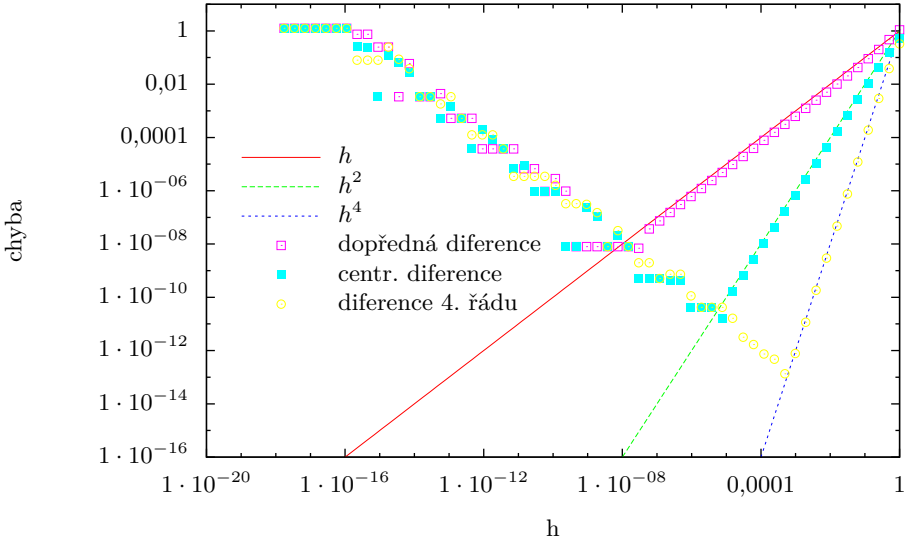
$$(\exp(\sin(x)))' = \cos(x) \exp(\sin(x)).$$

Program, který vypíše různé kroky h a příslušné chyby tedy vypadá např. takto.

```
import math
def diff4(f,x,h):
    return (-f(x+2*h)+f(x-2*h)+8*f(x+h)-8*f(x-h))/(12*h)
h=1.
x=1.
points=100
f=lambda x: math.exp(math.sin(x))
df=lambda x: math.cos(x)*math.exp(math.sin(x))
for i in range(points):
    print("{} {}".format(h, math.fabs(df(x)-diff4(f,x,h))))
    h/=2
```

Závislost chyby na velikosti kroku je pak vynesena v grafu 17. Z grafu vidíme, že optimální krok je $h_{\text{opt}} \doteq 5 \cdot 10^{-4}$ a odpovídající chyba numerické derivace $1 \cdot 10^{-13}$, což je méně než

²¹Pokud bychom ji neznali, lze jako odhad použít numerickou metodu vyššího řádu.



Obr. 17: Závislost chyby derivace na kroku h pro různé metody. Jako testovací funkce byla zvolena $f(x) = \exp(\sin(x))$ v bodě $x = 1$.

pro centrovanou a dopřednou diferenci. Optimální krok je naopak v souladu s tvrzením v seriálu větší než u dopředné a centrované diference. Také si všimněme, že chyba metody klesá jako $O(h^4)$, což jsme očekávali.

Nyní zmiňme řešení bonusu. Zaokrouhlovací chybu spočítáme obdobně jako v textu seriálu. Platí pro ni

$$\Delta f'(x) = \frac{-f(x+2h)\varepsilon_1 + f(x-2h)\varepsilon_2 + 8f(x+h)\varepsilon_3 - 8f(x-h)\varepsilon_4}{12h},$$

$$\Delta f'(x) \approx \frac{18\varepsilon|f(x)|}{12h} = \frac{3\varepsilon|f(x)|}{2h},$$

kde ε_1 , ε_2 , ε_3 a ε_4 jsou skutečné relativní chyby vyčíslení funkce a $\varepsilon \approx \varepsilon_{1..4}$ je strojová přesnost. Povšimněme si, že pro zaokrouhlovací chybu znova platí $\Delta f'(x) \propto h^{-1}$.

Chyba metody pak z Taylorova rozvoje je

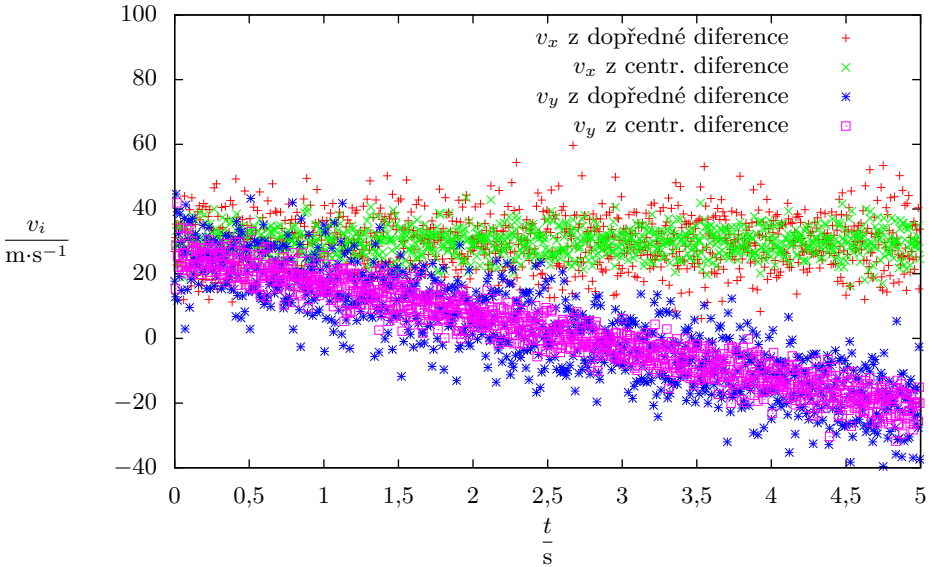
$$\delta = \frac{48|f^{(5)}(\xi)|}{5! \cdot 12} h^4 \approx \frac{|f^{(5)}(x)|}{30} h^4,$$

kde ξ je nějaké (správné) číslo mezi x a $x+h$. Z podmínky pro minimální chybu $\delta \approx \Delta f'(x)$ máme

$$h_{\text{opt}} \approx \sqrt[5]{45\varepsilon \frac{|f(x)|}{|f^{(5)}(x)|}} \sim \varepsilon^{1/5} \sim 10^{-3},$$

což řádově odpovídá našemu „experimentálně“ získanému výsledku. Konkrétně pro $x = 1$ (v radiánech) ještě můžeme dopočítat $f(x) \doteq 2,3$, $f^{(5)}(x) \doteq 23,8$ a $h_{\text{opt}} \doteq 8,5 \cdot 10^{-4}$.

- b) Přístupme k řešení problému obráceně, nejprve vypočtíme rychlost a zrychlení pomocí dopředné a centrování diference a poté se výsledky pokusme interpretovat.

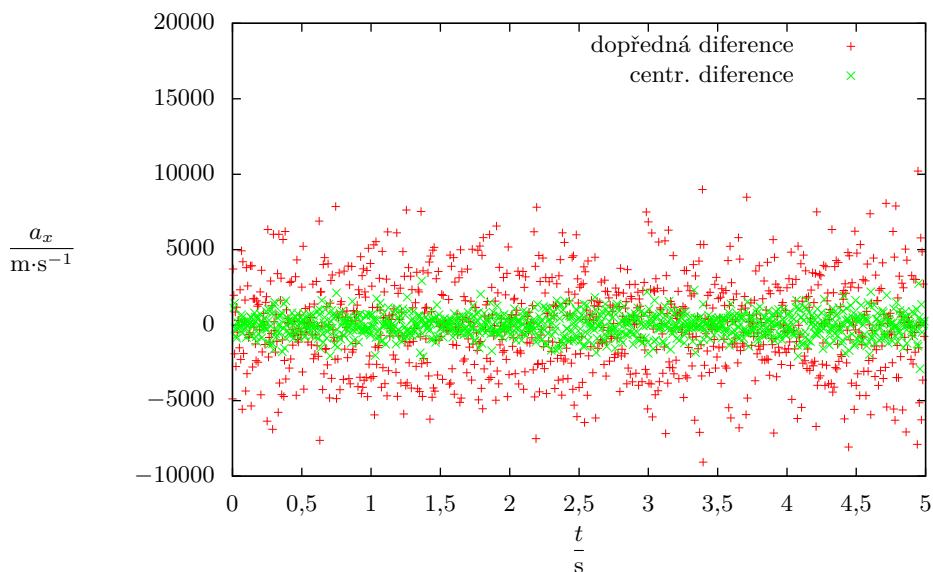


Obr. 18: Závislost složek rychlosti na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.

Jak vidíme z grafů rychlosti 18 a zrychlení 19, 20, v x ovém směru bod vykonává rovnoměrný pohyb rychlostí asi $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a v y ovém směru rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb s počáteční rychlostí asi $27 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a zrychlením asi $-10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, přičemž zrychlení nedokážeme díky šumu vyčíst rovnou z grafu zrychlení, ale dokážeme jej určit výpočtem z grafu rychlosti. Vidíme tedy, že se jedná o případ vrhu v homogenním tíhovém poli.

Také vidíme, že centrování diference má menší rozptyl než dopředná diference. Protože druhá a vyšší derivace funkce $x(t) = 30 \cdot t$ podle času je rovna nule, dělíme ve vztahu pro optimální krok dopředné i centrování diference nulou a optimální krok tedy neexistuje, vždy jsme v režimu převládající zaokrouhlovací chyby. Obdobně pro $y(t)$ je nulová až třetí derivace, dopředná diference tedy má (pro $t = 1 \text{ s}$) $h_{\text{opt}} \approx 10^{-8} \text{ s}$, ale centrování diference opět optimální krok nemá. To si můžete lehce ověřit vyřešením předchozí podúlohy pro testovací funkce $x(t) = v_x t$ a $y(t) = v_y t - 1/2 g t^2$, kde v_x , v_y a g jsou konstanty.

Protože pro $x(t)$ jsou obě metody v režimu s převládající zaokrouhlovací chybou, měly by mít srovnatelnou přesnost, což ale očividně neplatí. To napovídá, že zde existuje nějaký efekt, který je daleko větší než vliv zaokrouhlovací chyby a chyby metody. Pokud se pozorně podíváme na předchozí data či si pořádně přečteme zadání, zjistíme, že neleží přesně na teoretické závislosti, ale, jako správná experimentální data, se kolem ní vyskytují s nějakou nepřesností měření. Centrování diference je pak přesnější, jak je vidět z následujícího příkladu. Představme si, že by naše závislost polohy byla konstantní (ale stále s „experimentálním“ rozptylem σ). Pevně nyní zvolme nějakou vysokou pravděpodobnost P , třeba 99%. Pak existuje číslo $n > 0$ takové, že dva po sobě následující body leží s pravděpodob-



Obr. 19: Závislost x ové složky zrychlení na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.

ností P na bočních stranách obdélníku o podstavě h a výšce $n\sigma$. Pokud je spojíme úsečkou, bude mít tato úsečka směrnici, tím pádem i chybu derivace, menší než $n\sigma/h$. Pokud ale použijeme centrovanou diferencí,²² používáme body „ob jedna“, které s pravděpodobností P leží na bočních stranách obdélníku o podstavě $2h$ a výšce $n\sigma$. Směrnice jejich spojnice bude nanejvýš $n\sigma/(2h)$, chyba tedy bude poloviční.

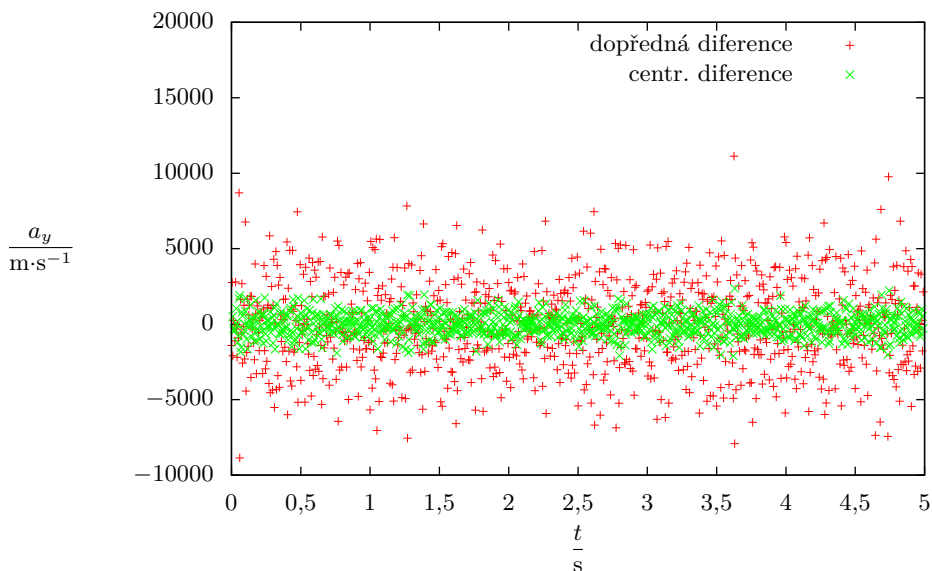
Obecně dle výše uvedeného by mělo platit, že čím je metoda vyššího řádu, tím lépe bude fungovat. Tomu navíc pomůže to, že metody vyššího řádu pracují s funkčními hodnotami ve více než dvou bodech, efektivně tedy v sobě obsahují obdobu váženého průměru, který by měl napomoci vyrušení rozptylu hodnot.

Všimněme si také, že rozptyl původních hodnot polohy je velmi malý, odpovídá měření s relativní odchylkou 0,02 %, což je velmi přesné měření. Přesto se tato odchylka aplikací derivace nesmírně zvětší. To je způsobeno tím, že numerická derivace není dobře podmíněná úloha, použité metody tedy nemohou být numericky stabilní.

Pokud bychom chtěli náš výsledek zpřesnit, mohli bychom toho docílit různými způsoby. Dle výše uvedeného by mělo pomoci zvětšení kroku přeskokováním některých hodnot, či použití metody vyššího řádu, přičemž druhá možnost by měla fungovat lépe. Další možností je na data před derivací nejprve aplikovat tzv. klouzavý průměr²³, čímž bychom zredukovali rozptyl hodnot. Jak již ale bylo zmíněno, metody vyšších řádů už v sobě jistý způsob průměrování efektivně obsahují, jednoduchým neváženým klouzavým průměrem bychom tedy nejspíš lepších výsledků nedosáhli. Ve chvíli, kdy známe teoretickou závislost, podle které se data mají chovat, je asi nejlepším řešením data touto závislostí nafitovat a poté analyticky

²²Stejný efekt by měla i dopředná diference s dvojnásobným krokem.

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_average



Obr. 20: Závislost y ové složky zrychlení na čase získaná dopřednou a centrovanou diferencí.

derivovat teoretickou závislost s koeficienty určenými z fitu.

- c) Zadaný integrál lze snadno spočítat například za pomoci goniometrického vztahu $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ a substituce $y = 2x$. Dostaneme

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dx - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos y dy = \frac{\pi}{2}.$$

Zadání nám však ukládá postupovat bez znalosti integrálního počtu, pojďme se o to tedy pokusit.

1. Pro kartézské souřadnice a, b bodu na jednotkové kružnici, představující délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, platí Pythagorova věta ve tvaru $a^2 + b^2 = 1$. Neboli, vyjádřeno pomocí úhlu při středu kružnice mezi přeponou a jednou odvěsnou x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dále víme, že určitý integrál I vyjadřuje obsah útvaru vymezeného funkcí $\sin^2 x$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, tj. obsah jednoho „kopečku“ funkce $\sin^2 x$.

Když k funkci $\sin^2 x$ všude připočteme funkci $\cos^2 x$, dostaneme díky Pythagorově větě místo kopečku obdélník o stranách π a 1, tedy o obsahu π . Nyní si už jen zbývá uvědomit, že funkce sinus a kosinus jsou identické až na posun o $\pi/2$ v ose x (a tedy i jejich kvadráty). Jeden kopeček kosinu na druhou má tedy stejný obsah jako kopeček sinu na druhou. Jeden kopeček má tedy obsah přesně dvakrát menší než obdélník, a tedy $I = \pi/2 \doteq 1,5708$, což je v souladu s výsledkem výše.

2. K numerickému výpočtu použijeme kód na výpočet Monte Carlo integrace ze seriálu.²⁴ Generujeme dvojice pseudonáhodných čísel $\langle x, y \rangle$ na intervalech $\langle 0, \pi \rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle$, kritériem

²⁴Všeckeré kódy použité v řešení této seriálové úlohy naleznete na našem webu.

pro zásah je $y < \sin^2 x$. Ve výpočtu směrodatné odchylky je nyní $V = \pi$ a $O = \pi/2$, relativní směrodatnou odchylku pak vyjádříme jako

$$\frac{\sigma}{O} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{(V/O - 1)} = 0,001.$$

Pro jeden konkrétní běh programu s $N = 10^6$ jsme dostali výsledek 1,569 s relativní odchylkou od průměru 0,0012.

Při řešení bonusové úlohy, odhad π pomocí házení jehly, si také vystačíme s mírnou úpravou kódu ze seriálu. Budeme volit $a = b = 1$, tzn. stejnou šířku pásu jako délku jehly.²⁵ Čím menší jehlu bychom volili, tím méně častěji by prořala hranici pásů a tím déle by musela simulace běžet, abychom dosáhli dané přesnosti. Dále víme, že stačí generovat dvojice pseudonáhodných čísel $\langle \vartheta, x \rangle$ z intervalů $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ a $\langle 0, 1/2 \rangle$, neboť tak pokryjeme všechny možné horizontální polohy středu jehly a veškerá možná její natočení. Není potřeba uvažovat další pásy, protože se periodicky opakují. Stejně tak nepotřebujeme rozlišovat, zda jehla leží napravo nebo nalevo o hranice, kterou prořala. Kritérium protnutí vyjádříme tak, že horizontální souřadnice levého konce jehly $x - (\cos \vartheta)/2$ je menší než nula.

Ze seriálu víme, že pro $a = b = 1$ je pravděpodobnost protnutí $2/\pi \doteq 0,6366$. Pro jeden běh programu s $N = 10^6$ jsme dostali výsledek 0,6368 s relativní směrodatnou odchylkou (teoretickou) 0,0008 a relativní odchylkou od průměru 0,0004.

- d) Objem koule v libovolné dimenzi musí záviset pouze na jejím poloměru R , neboť žádnou jinou informaci o kouli nemáme. Z jednotkových důvodů musí být poloměr umocněn na číslo udávající dimenzionalitu, v našem případě máme R^6 . Tento mocniný výraz bude vynásoben konstantním faktorem, který obecně může být různý pro každou dimenzi. Volbou $R = 1$ se naše úloha omezuje na hledání tohoto faktoru.

Objem n -dimenzionální koule o poloměru R lze vyjádřit vzorcem

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n,$$

kde Γ je gama funkce. Nebudeme se zde zabývat její definicí, pouze si řekněme, že pro přirozené číslo n lze psát $\Gamma(n + 1) = n!$. Nás zajímá dimenze 6, argumentem gama funkce tedy bude přirozené číslo a můžeme psát

$$V_6 = \frac{\pi^3}{3!} R^6.$$

Hledaný faktor je tedy roven $\pi^3/3! \doteq 5,1677$.

S uvedeným faktorem nyní srovnáme výsledek získaný metodou Monte Carlo. Použili jsme kód ze seriálu pro výpočet obsahu čtvrtkruhu s mírnými úpravami. Počet bodů jsme zvýšili na 10^7 a pomocí funkce random nyní nevytváříme dvojice, ale šestice náhodných čísel. V boxu o hraně 1 (šestidimenzionální krychle) nyní není uzavřena čtvrtina kruhu, ale $1/2^6$ z objemu koule. Kritériem zásahu dovnitř objemu koule je výraz

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 < 1,$$

²⁵ V seriálu jsme psali podmínku $a < b$, ale vzhledem k omezené přesnosti reprezentace čísel v počítači toto nemá smysl rozlišovat.

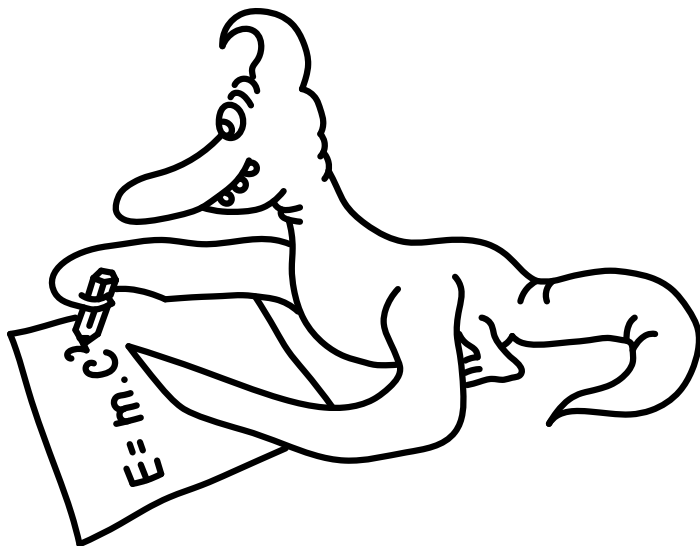
kde x_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou kartézské souřadnice náhodných bodů. Na základě znalosti přesného výsledku můžeme vypočítat směrodatnou odchylku

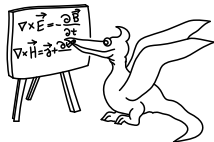
$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{O(V - O)},$$

kde $V = 1^6 = 1$ a $O = \pi^3 \cdot 2^{-6} \cdot 3!$, číselně tedy získáme relativní odchylku $\sigma/O \doteq 0.0011$. Zde vidíme, že poměr O/V je již celkem nevýhodný a museli jsme proto volit o řád větší počet bodů (v porovnání s 2D případem), abychom dosáhli směrodatné odchylky $\sim 10^{-3}$. Výsledkem jednoho běhu programu byla průměrná hodnota hledaného faktoru 5,172 (relativní odchylka od průměru je 0,0008).

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz





Seriál: Na procházce s integrály

V minulém díle jsme se seznámili s numerickou derivací a se základy stochastické metody Monte Carlo, jmenovitě MC integrací. Nyní navážeme obecnějším výkladem numerické integrace, ale předtím se ještě podíváme na matematický pojem „náhodná procházka“. Náhodné procházky využijeme jednak v pokročilých metodách MC integrace, ale také například při simulaci Brownova pohybu.

Náhodné procházky

Na počátku studia fyziky se studenti obvykle seznámí s mechanikou a Newtonovými zákony. Pomocí nich se naučí spočítat, kterým směrem a jakou rychlostí se bude pohybovat hmotný bod v důsledku sil na něj působících. Tento přístup ovšem selhává, pokud budeme chtít předpovědět například trajektorii prachového zrnka ve vzduchu. Abychom našli polohu částice o byt jen několik nanosekund později, potřebovali bychom vyřešit statistice srážek – musíme totiž znát také aktuální polohu všech molekul, které by se s naší částicí mohly srazit. Tento výpočetně náročný přístup využívá v simulacích molekulová dynamika.

Snížíme-li své nároky a budeme chtít nalézt pouze střední vzdálenost nebo jinou statistickou veličinu, odemyká se nám možnost použít stochastické simulace. Základní myšlenkou je zde předpoklad, že okolní molekuly se pohybují náhodnými směry a rychlostmi (v případě klasického plynu určenými gaussovským rozdělením). Toto molekulární pozadí vyjme z výpočtů a budeme se věnovat pouze pohybu těžké částice, který bude v důsledku náhodného hemžení na pozadí také náhodný. Pro pohyb těžké částice v důsledku chaotického pohybu molekul okolní tekutiny se ustálil název *Brownův pohyb*. Tento fyzikální pohyb můžeme aproximovat diskretním matematickým modelem zvaným *náhodná procházka*, který v každém časovém kroku posune částici náhodným směrem o pevně zvolenou vzdálenost. Náhodná procházka spadá do širší rodiny Markovových procesů, na které se nyní podíváme podrobněji.

Markovovy procesy

V prvním dílu seriálu jsme se seznámili s pojmem náhodná proměnná. Jednalo se o proměnnou, jejíž hodnota není předem známa (tj. není to konkrétní číslo), pouze známe pravděpodobnosti nabývání hodnot z určité množiny. Tyto pravděpodobnosti byly dány pravděpodobnostním rozdělením, např. náhodná proměnná „hod kostkou“ mohla nabývat hodnot 1 až 6 z diskretního rovnoměrného rozdělení. Pokud uspořádáme náhodné veličiny do řetězce, tj. přiřadíme náhodným veličinám indexy $1, 2, \dots, n$, nazýváme tento řetězec *náhodný proces*. Příkladem náhodného procesu je třeba série hodů mincí.²⁶ *Realizací* tohoto náhodného procesu je uspořádaná množina, jejíž každý prvek nabývá hodnoty „panna“ nebo „orel“ – například jsme vytvořili pomocí pěti hodů korunovou mincí realizaci náhodného procesu

{panna, panna, panna, orel, panna}.

²⁶Konkrétně se jedná o tzv. Bernoulliho proces s pravděpodobnostmi $p = 1/2$ a $1 - p = 1/2$.

V tomto procesu jsou prvky řetězce představovány navzájem nezávislými a shodně rozdělenými²⁷ náhodnými veličinami. Obecně však mohou být veličiny závislé a různě rozdělené. Uvažte třeba takovýto proces (A): Házím mincí, dokud nepadne panna, a pak házím kostkou, dokud nepadne šestka; pak házím mincí, dokud nepadne panna, a pak házím kostkou, dokud . . . Jiný příklad (B): Házím šestistěnnou kostkou a počítám oka tak dlouho, dokud nezískám součet větší nebo roven 20; poté vyměním šestistěnnou kostku za desetistěnnou a pokračuji v přičítání, dokud nedosáhnu součtu 40; poté se vrátím k šestistěnné kostce atd.

Nyní uvažujme speciální případ náhodného procesu, kdy jsme schopni určit stav v následujícím kroku bez znalosti historie procesu. Jinými slovy, pravděpodobnost realizace hodnoty x náhodné veličiny X_{i+1} dokážu jednoznačně určit na základě realizace y náhodné veličiny X_i . Těto vlastnosti říkáme přílehavě *bezpaměťovost* a příslušný náhodný proces se nazývá *Markovův*.²⁸ Formálně tuto vlastnost (pro diskrétní náhodné veličiny) zapíšeme

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_i = x_i) = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i) \quad (8)$$

a čteme: Pravděpodobnost, že náhodná veličina X_{i+1} nabývá hodnoty x_{i+1} za podmínky, že v prvním kroku nabyla veličina X_1 hodnoty x_1 , v druhém kroku nabyla veličina X_2 hodnoty x_2 atd., je stejná jako pravděpodobnost, že X_{i+1} nabude hodnoty x_{i+1} za podmínky, že v předešlém kroku nabyla X_i hodnoty x_i . Znalost řetězce na rozsahu indexů 1 až $i-1$ je tedy úplně zbytečná, můžeme ji zapomenout.

Série hodů mincí je triviálním případem *bezpaměťového* řetězce, kdy není potřeba znát ani stav v kroku i (toto platí pro každý řetězec navzájem nezávislých náhodných veličin). Proces A je také Markovův proces, další krok se řídí vždy současným stavem. *Bezpaměťový* je i proces B – pro určení stavu v kroku B nám postačí znalost aktuálního součtu a typu kostky, kterou jsme naposled házeli. Vymyslet proces, který není Markovův, je snadné, například: Házím kostkou a počítám hodnoty, pokud padnou dvě šestky za sebou, přičtu k součtu v následujícím kroku bonus 10. Pro určení stavu v následujícím kroku je zjevně potřeba znát alespoň dva předchozí stavy, předpoklad (8) je porušen.

Náhodná procházka v 1D

Náhodná procházka je náhodný proces daný součtem nezávislých a shodně rozdělených náhodných veličin. Nejjednodušším příkladem je opět házení mincí, na rozdíl od příkladu výše však není aktuální stav určen posledním hodem, ale součtem všech dosavadních hodů (přitom uvažujeme panna = -1 , orel = 1). Název *náhodná procházka* vychází z představy, kdy součtu realizací náhodných veličin přiřadíme význam vzdálenosti od počátku – máme tedy objekt, který se v každém kroku pohne náhodně doleva, nebo doprava, a takto se prochází po přímce.

Možná si vzpomenete na úlohu z prvního dílu seriálu, kdy Mirek s Lukášem hráli o FYKOSí trička, přičemž o vítězi trička se v každém kroku rozhodovalo na základě hodu mincí. Tehdy jsme jako „hru“ označili sekvenci obsahující počty triček jednoho z hráčů. „Hra“ bylo tedy označení pro realizaci náhodné procházky končící pro některého hráče nulou (stav, kdy jeden hráč měl všechna trička nebo žádné, představoval *absorpční bariéru* = konec hry).

Nadále budeme často zaměňovat pojmy *náhodná procházka* a *realizace náhodné procházky*, je však dobré mít na paměti, že se principiálně liší.

²⁷ V anglické literatuře se můžete setkat se zkratkou *iid* – independent and identically distributed.

²⁸ Občas se v učebnicích můžete setkat i s označením *markovský* či *markovovský* proces, v obou případech jde o podobnostní přídavné jméno odvozené od ruského matematika Andreje Andrejeviče Markova.

Řádky udávají délku řetězce n , sloupce polohu k (nula uprostřed) a čísla v tabulce počty možností, jak se do bodu dostat. Konstruujeme tedy Pascalův trojúhelník, přičemž po sudém počtu kroků můžeme být vždy pouze ve vzdálenosti od počátku dané sudým číslem, podobně pro lichý počet kroků lichým číslem. Prvky v tomto Pascalově trojúhelníku lze vyjádřit pomocí kombinačního čísla

$$\binom{n}{(n-k)/2}.$$

Pravděpodobnost realizace jednoho konkrétního řetězce je $1/2^n$, hledaná pravděpodobnost, že po n krocích se nacházíme v bodě k , je tedy

$$2^{-n} \binom{n}{(n-k)/2}.$$

Nalézt střední polohu opilce je velice jednoduché.²⁹ Platí

$$E(W_n) = E\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n E(S_i) = 0,$$

kde jsme využili toho, že střední hodnota součtu nezávislých veličin je rovna součtu jejich středních hodnot. Tento výsledek není nijak překvapivý, neboť každý řetězec délky n končící v bodě k k sobě má symetrický řetězec okolo počátku končící v bodě $-k$.

Poslední otázka je poněkud komplikovanější. Hledáme střední hodnotu $E(|W_n|)$, což je určitě nenulová hodnota. Odhadnout³⁰ chování tohoto výrazu lze pomocí odmocniny ze střední hodnoty kvadrátu (střední kvadratická hodnota, *root mean square*), kterou opět díky vlastnostem střední hodnoty zapíšeme jako

$$E(W_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(S_i S_j).$$

Pro $i = j$ máme $E(S_i^2) = 1$, pro $i \neq j$ je střední hodnota nulová, protože jde o součin nezávislých veličin, celkově tedy

$$\sqrt{E(W_n^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n}.$$

Řešení uvedených čtyř otázek nám poskytlo základní vhled do chování náhodných procházek, ale zdaleka se nejednalo o vyčerpávající rozbor. Studium náhodných procházek má význam v algebře, numerických metodách, ekonomii a dalších oborech. Dodnes před námi stojí mnoho nevyřešených otázek, především ohledně chování vícedimenzionálních procházek, a na ty se nyní podíváme.

²⁹Při velkém obsahu alkoholu v krvi bude tato střední poloha pravděpodobně horizontální.

³⁰Je ovšem možné spočítat $E(|W_n|)$ i přesně. Můžete si to zkusit.

Náhodná procházka ve více dimenzích

Definice náhodné procházky ve více dimenzích přináší dodatečnou komplikaci. Zatímco v 1D existovaly pouze dva možné směry, kam vykročit, nyní jich je nekonečně mnoho. Abychom si situaci ulehčili, budeme předpokládat, že v každém kroku je možné pohnout se pouze ve směru nebo proti směru jedné z kartézských os. Takže ve dvou dimenzích budeme mít čtyři možnosti pohybu, ve třech osm, \dots , obecně 2^d směrů, kde d je dimenze v prostoru. Specificky ve dvou dimenzích (v těch se budeme pohybovat především) jsou možné polohy v prostoru reprezentovány uzly čtvercové sítě.

Náhodná veličina K_i , která představuje jeden krok, může ve 2D nabývat čtyř hodnot, které si označíme třeba l , r , u , d (*left*, *right*, *up*, *down*). Také se na tuto veličinu můžeme dívat jako vektor se dvěma složkami, který může nabývat hodnot $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$, každé s pravděpodobností jedna čtvrtina. Náhodnou procházku pak definujeme opět přes součet

$$W_n = \sum_{i=1}^n K_i,$$

přičemž proces náhodné procházky $\{W_n\}$ je nyní tvořen posloupností vektorových náhodných veličin.

Otázky, které jsme řešili pro případ 1D procházky, lze přeformulovat i pro vícedimenzionální případ, ale nalezení odpovědi je již komplikovanější. Omezíme se pouze na otázky c) a d). Lze si rozmyslet, že střední polohou bude opět počátek, a to v jakémkoli počtu dimenzí. V souboru všech možných (realizací) procházek najdeme ke každé procházce právě jednu další symetrickou okolo počátku a střední poloha této dvojice je nulová, tedy i střední hodnota pro celý soubor bude nulová. Střední vzdálenost opět pouze odhadneme pomocí střední kvadratické hodnoty

$$\sqrt{\mathbb{E}(W_n^2)} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(K_i \cdot K_j) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(K_i \cdot K_i) \right)^{1/2} = \sqrt{n}.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako pro jednu dimenzi díky skutečnosti, že skalární součin dvou identických vektorů K_i je roven jedné. Vzdáleností se zde myslí eukleidovská vzdálenost

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{1/2},$$

skalární součin pak udává čtverec vzdálenosti. Samotná střední vzdálenost je (v asymptotickém smyslu, tedy pro $n \rightarrow \infty$) ještě násobena faktorem, který se blíží určité malé hodnotě z intervalu $(0, 1)$.

Pro algebraiky je důležitou otázkou, zda se procházka někdy navrátí do svého počátku. Bez důkazu zde uvedme, že dvoudimenzionální procházka v limitě nekonečného počtu kroků alespoň jednou dosáhne každého bodu, a tedy i toho počátečního. Konvergence pravděpodobnosti návratu k hodnotě 1 je ale velmi pomalá, proto v oblasti simulací není příliš důležitá. Pro 1D procházku platí silnější tvrzení, že v limitě nekonečného počtu kroků projdeme každým bodem nekonečněkrát.

Jako motivaci pro studium náhodných procházek jsme na začátku uvedli Brownův pohyb. Avšak správný model Brownova pohybu by měl být v čase spojitý. Provedeme-li pro náhodnou

procházku s časovým krokem Δt limitu $\Delta t \rightarrow 0$, dostaneme tzv. Wienerův proces. Na počítači však není možné provést simulaci, která je v čase spojitá. Jelikož však naše definice náhodné procházky pevně svazuje časový krok Δt a délku kroku v prostoru Δl , můžeme se Wienerově procesu (a tedy i Brownově pohybu) přiblížit přeškálováním rozměru procházky. Jinými slovy, limitu $\Delta t \rightarrow 0$ nahradíme limitou $\Delta l \rightarrow 0$. Abychom toto chování ozřejmili, ukážeme si nyní, jak vypadají výsledky simulace náhodné procházky.

Pro simulaci jednoduché 2D procházky jsme použili následující kód psaný v Pythonu:

```
# nacteme matematickou knihovnu a-knihovnu s-generatory nahodnych cisel,
# numerickou knihovnu a-grafickou knihovnu
import math
import random
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

# zadame delku nahodne prochazky a-pocet opakovani
max_krok = 10000
max_pocet = 10000
pocet = 0
# definujeme pole, do ktereho budeme ukladat stredni vzdalenost od pocatku
vzd = np.zeros(max_krok+1,dtype=np.float)

while pocet < max_pocet:
    pocet += 1
    # definujeme pole, do kterych budeme ukladat trajektorii posledni prochazky
    xs = np.zeros(max_krok+1,dtype=np.float)
    ys = np.zeros(max_krok+1,dtype=np.float)
    # resetujeme aktualni pocet kroku
    krok = 0
    while krok < max_krok:
        krok += 1
        # generujeme dve nahodna cisla z-mnoziny {0,1}, ktera rozhodnou,
        # zda se budeme pohybovat po vertikale, nebo horizontale
        # a-jestli v-kladnem, nebo zapornem smeru
        hv = math.floor(random.random()+0.5)
        pm = math.floor(random.random()+0.5)
        # naplnime dalsi element pole trajektorii predchozi hodnotou
        xs[krok] = xs[krok-1]
        ys[krok] = ys[krok-1]
        # posuneme se o-jeden krok
        if hv == 0:
            if pm == 0:
                xs[krok] += -1
            else:
                xs[krok] += 1
        else:
            if pm == 0:
                ys[krok] += -1
            else:
                ys[krok] += 1
        # pricteme vzdalenost aktualni prochazky po aktualnim poctu kroku
        vzd[krok] += math.sqrt(xs[krok]**2. + ys[krok]**2.)

# pole vzdalenosti vydeline poctem prochazek, abychom dostali prumer
vzd = vzd/float(max_pocet)
```

Tento kód generuje `max_pocet` náhodných procházek o délce `max_krok`, přičemž vzdálenost procházky v každém kroku od počátku ukládá do pole `vzd`. Na konci každý prvek tohoto pole obsahuje součet vzdáleností po počtu kroků rovnému pozici prvku. Vydělením tohoto pole počtem všech procházek dostaneme závislost průměrné vzdálenosti na počtu kroků. Průměrování

velkého počtu procházek je důležité – zvolíme-li malou hodnotu `max_pocet`, může vzdálenost od počátku i klesat, pokud se v našem souboru zrovna vyskytne více procházek, které se vracejí k počátku.

Pro uvedené hodnoty jsme zjistili, že průměrná vzdálenost po 10 000 krocích je 89,2. To docela dobře odpovídá asymptotické hodnotě³¹ 88,6. Spíše by nás však zajímalo, jak vypadá závislost střední vzdálenosti na počtu kroků a jak vůbec vypadá realizace náhodné procházky (trajektorie). Na konec kódu výše proto přidáme následující:

```
# fitujeme přímku v-log-log grafu na posledních (fit_body) bodech
fit_body = 1000
fit_range = np.linspace(max_krok-fit_body+1,max_krok,fit_body)
log_range = [math.log10(y) for y in fit_range]
log_vzd = [math.log10(y) for y in (vzd[max_krok-fit_body+1:])]
fit,cov = np.polyfit(log_range,log_vzd,1,cov=True)
print('Smernice fitu v-je {} se smerodatnou odchylkou {}'.format(fit[0],
    math.sqrt(cov[0,0])))

# nakreslime graf prumernych vzdalenosti a-trajektorie posledni prochazky
vzdplot = plt.plot(range(max_krok+1),vzd,'r',linewidth=2)
plt.show()
prochplot = plt.plot(xs,ys,linewidth=1)
plt.show()
```

Ze závislosti vzdálenosti na počtu kroků vezmeme posledních 1 000 bodů, provedeme logaritmickou transformaci a fitujeme daty polynom prvního řádu (přímku). Proměnná `fit` v sobě obsahuje koeficienty a , b lineárního fitu $f(x) = ax + b$ a proměnná `cov` je matice,³² na jejíž diagonále leží rozptýly odpovídající koeficientům a , b . Po dostatečném počtu kroků n by se měla vzdálenost od počátku chovat jako \sqrt{n} , směrnice přímky by tedy měla být rovna exponentu 1/2. Výstupem jednoho běhu programu byl koeficient $a = 0,4890 \pm 0,0004$, což je poměrně blízko očekávané hodnotě 0.5.³³ Poslední řádku kódu vykreslují graf závislosti vzdálenosti na počtu kroků, abychom mohli asymptotické chování ověřit vizuálně (obr. 21), a také vykreslují trajektorii poslední vygenerované procházky. Příklady procházek o délkách 10 000 a 200 000 kroků jsou na obrázcích 22 a 23. V druhém případě již nedokážeme rozeznat jednotlivé kroky – trajektorie se blíží realizaci spojitého Brownova pohybu.

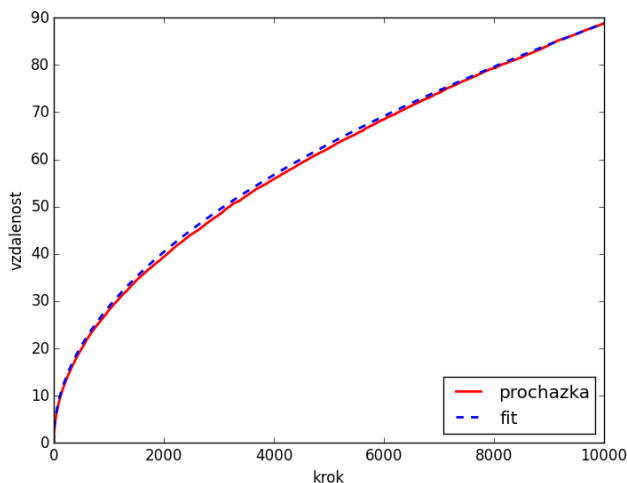
Kromě jednoduché procházky, které jsme se doteď věnovali, lze definovat ve 2D různé modifikace, které neměly v jedné dimenzi dobrý smysl. *Procházka bez návratu* v sobě zahrnuje dodatečný požadavek, že pokud nabývá K_i určité hodnoty, např. $(1, 0)$, nemůže K_{i+1} nabývat hodnoty opačné, $(-1, 0)$. *Procházka bez křížení* zakazuje, abychom do jakéhokoli bodu vstoupili výše než jednou. Na obrázku 22 bychom tedy viděli jednoznačný začátek a konec. Platí zajímavé³⁴ tvrzení, že pravděpodobnost, že se náhodná procházka vrátí do počátečního bodu, roste s počtem kroků k jedné. Z toho nutně plyne, že každá procházka bez návratu jednou skončí. Nemá proto smysl studovat asymptotické chování střední vzdálenosti od počátku, ale můžeme například hledat střední délku procházky.

³¹ Využili jsme znalosti multiplikatívního faktoru pro dimenzi dvě, který má hodnotu $\sqrt{\pi}/2$. V řešení seriálových úloh nepožadujeme dohledávat tyto faktory.

³² Jedná se o kovarianční matici. Pokud se o kovarianci chcete dozvědět více, doporučujeme 3. díl seriálu z 30. ročníku FYKOSu.

³³ Pokud bychom chtěli zkusit provést výpočet pro delší procházky, trval by jeden běh programu již poměrně dlouho (minuty a více). Nezájímáme-li se o trajektorie procházek, můžeme si místo polí `xs` a `ys` ukládat pouze aktuální vzdálenost, čímž se běh programu výrazně zrychlí.

³⁴ Má využití například při maticovém zápisu integrálních rozvojų nebo při řešení Laplaceovy rovnice ve 2D.



Obr. 21: Vzdálenost 2D procházky od počátku v závislosti na počtu kroků. Graf vznikl průměrováním 10 000 procházek o délce 10 000 kroků. Mocninový fit byl proveden na posledních 1 000 bodech, v levé části grafu proto vidíme, že fit příliš nesedí – nevykazuje asymptotické chování.

Další možnou variací procházky je změna sítě, na které se pohybujeme. Řekněme, že použijeme například hexagonální mřížku. Potom z mikroskopického hlediska, tj. pro malý počet kroků, budeme pozorovat odlišnosti od případu s čtvercovou mřížkou. S rostoucím počtem kroků však tyto odlišnosti postupně mizí a procházka postupně konverguje k Brownovu pohybu. K tomuto chování dojde vždy, zachováme-li potřebnou symetrii ve volbě kroků.

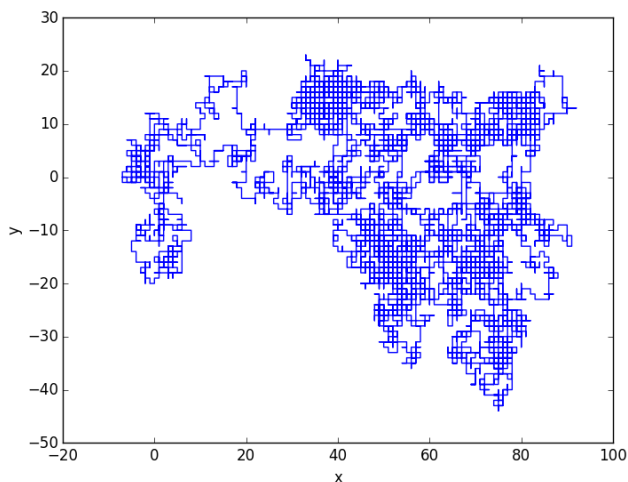
Náhodné procházky ve třech dimenzích³⁵ a vyšších nejsou příliš dobře prozkoumané, alespoň z analytického hlediska. Jedním z analytických výsledků je, že s rostoucí dimenzí postupně klesá pravděpodobnost návratu k nule, zatímco v jedné i ve dvou dimenzích je rovna jedné, jak jsme zmiňovali výše. Pomocí počítačových simulací lze získat představu o asymptotickém chování délky procházky, pravděpodobnosti dosažení absorpční bariéry apod. To si vyzkoušíte v seriálové úloze. Ve velmi vysokých dimenzích nedokážeme simulacemi získat dobrou statistiku a nastupují zpět analytické metody.

Numerická integrace

Naším cílem je numericky zjistit hodnotu určitého integrálu

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

³⁵Ti, kdo zažili éru Windows 95/98, si pravděpodobně vzpomenou na spořič obrazovky vykreslující spleť potrubí (Pipes screensaver). Jednalo se o 3D náhodnou procházku bez křížení s reflexivními okrajovými podmínkami vykreslovanou pomocí knihovny OpenGL. Problémem tohoto spořiče bylo, že mnohdy vytěžoval obrazovku i procesor více než běžná kancelářská práce.



Obr. 22: Trajektorie 2D procházky o délce 10 000 kroků. V grafu jsou dobře vidět jednotlivé pravoúhlé kroky, je tedy zřejmé, že se nejedná o spojitý proces.

Tato znalost je zvláště užitečná, neboť jen pro relativně málo funkcí dokážeme úlohu vyřešit analyticky, tedy nalezením primitivní funkce

$$F(x) = \int f(x) dx$$

a spočtením určitého integrálu vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

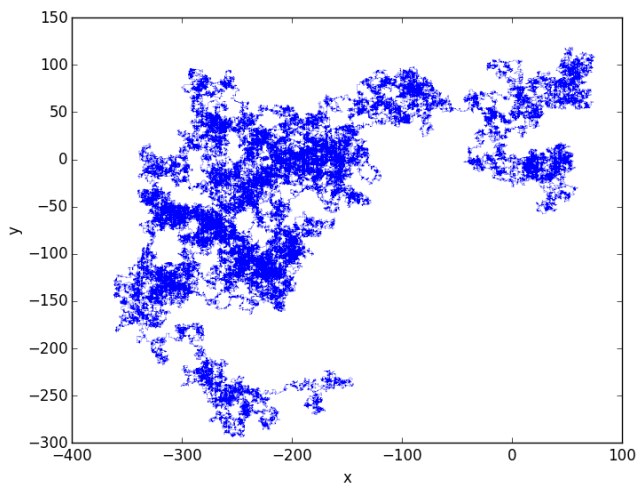
Vzpomeňme si nyní na poučku,³⁶ že hodnota integrálu je rovna obsahu plochy pod grafem funkce $f(x)$ (s opačným znaménkem, pokud je funkce záporná). Celý problém se tedy redukuje na výpočet obsahu plochy. První, co nás napadne, je aproximovat plochu obdélníkem o stranách $b - a$ a $f(\frac{a+b}{2})$. Jde o jednu z variant *obdélníkového pravidla*, nicméně jak asi uhadneme, tato aproximace není pro většínu funkcí příliš přesná. Lepší rozhodně bude použít místo obdélníka lichoběžník. Aproximace integrálu je pak rovna

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Pokud půjdeme v tomto duchu dále a aproximujeme plochu plochou pod parabolou, dostaneme jednoduché Simpsonovo pravidlo

$$I = \frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right).$$

³⁶Ve skutečnosti jde o definici Riemannova integrálu.



Obr. 23: Trajektorie 2D procházky o délce 200 000 kroků. Diskrétní mřížka již není patrná, procházka se blíží spojitému procesu.

Dalo by se očekávat, že přesnějších metod analogicky dosáhneme aproximací plochou pod polynomem 3., 4., ... řádu. Tyto metody se ale nepoužívají kvůli neodstranitelným zaokrouhlovacím chybám.

Výše uvedené metody (vč. těch vyššího řádu) se nazývají *jednoduché Newtonovy-Cotesovy vzorce*. Zpravidla nám ale jednoduché Simpsonovo pravidlo nestačí, proto si představíme *složené Newtonovy-Cotesovy vzorce*. Myšlenka je jednoduchá. Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ na mnoho stejně velkých na sebe navazujících intervalů. Na každém z nich potom použijeme jednoduchý N-C vzorec, celkový integrál je pak součtem integrálů přes tyto malé intervaly. Čím je počet podintervalů větší, tím je výpočet samozřejmě přesnější. Složené lichoběžníkové, resp. Simpsonovo pravidlo pak má tvar

$$I_{\text{lichoběžník}} = h \left(\frac{f_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{f_N}{2} \right),$$

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{6} (f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + \dots + 4f_{N-1/2} + f_N),$$

kde $h = (b - a)/N$, $f_k = f(a + hk)$ a $f_{k/2} = f(a + hk/2)$. V praxi se pak používají právě tato dvě pravidla.

Představili jsme si základní metody výpočtu určitého integrálu v jedné dimenzi. V praxi se pak používají i jiné, pokročilejší metody,³⁷ pro jejich použití je ale nutné ovládat pokročilý matematický aparát, proto se jimi zde nebudeme zabývat. N-C vzorce lze zobecnit i pro vyšší dimenze, vzpomeňme si ale na minulý díl, kde jsme zjistili, že pro $d > 4$ je výhodnější použít

³⁷Například Gaussovy kvadratury.

Monte Carlo integraci. Za určitých okolností, například pokud oblast, přes kterou integrujeme není pravouhlá, vyplatí se kvůli jednoduchosti použít MC integraci i v nižších dimenzích.

Představme si nyní, že chceme spočítat integrál z funkce, která má někde peak. Vzpomeňme si, že chyba (směrodatná odchylka) MC metody je $\sigma[I] = \sigma[f(x)]/\sqrt{N}$, kde N je počet vzorků a $\sigma[f(x)]$ rozptyl hodnot integrované funkce na daném intervalu. Pokud má ale funkce někde peak, pak tento rozptyl bude velký a v důsledku bude mít vypočtený integrál velkou chybu. To můžeme zachránit buď značným zvětšením počtu vzorků nebo zvolením jiného, než rovnoměrného rozdělení náhodných vzorků. Pokud totiž použijeme náhodné vzorkování s hustotou pravděpodobnosti $p(x)$, pak je hodnota integrálu rovna

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}.$$

a platí (viz obecné odvození v minulém díle seriálu)

$$\sigma[I] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{Var} \left[\frac{f(x)}{p(x)} \right]}.$$

Pokud bude $p(x)$ zvoleno tak, že $f(x)/p(x)$ bude skoro konstanta (nebo alespoň nebude obsahovat peaky) bude směrodatná odchylka hodnoty integrálu daleko menší. Abychom ale dokázali tohoto triku využít, musíme se naučit generovat náhodná čísla s libovolnou hustotou pravděpodobnosti.

Generování náhodných čísel s obecnou hustotou pravděpodobnosti

Zopakujme si nejprve některé základní pojmy týkající se spojitých náhodných reálných proměnných. *Hustotou pravděpodobnosti* nazýváme funkci $f(x)$ takovou, že

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx.$$

Čteme: Pravděpodobnost, že náhodná proměnná X leží v intervalu $\langle a, b \rangle$ je rovna integrálu z hustoty pravděpodobnosti s mezemi a a b . Jinak řečeno, hustota pravděpodobnosti $f(x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že X leží v úzkém intervalu $\langle x, x + dx \rangle$. Je zřejmé, že $f(x)$ je všude nezáporná.

Druhým způsobem, jak popsat rozložení pravděpodobnosti, je *distribuční funkce* definovaná vztahem

$$F(x) = P[X \leq x].$$

Čteme: hodnota distribuční funkce v bodě x je rovna pravděpodobnosti, že náhodná proměnná X je menší nebo rovna x . Mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti platí vztah

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Je zřejmé, že $F(x)$ je neklesající funkce a platí $F(-\infty) = 0$ a $F(+\infty) = 1$.

Inverze distribuční funkce

Prvním způsobem generování náhodných čísel s libovolnou distribucí je následující tvrzení. Mějme náhodnou proměnnou X s distribuční funkcí $F_X(x)$. Pak proměnná Y definovaná výrazem $Y = F_X(X)$ má rovnoměrné rozložení na intervalu $(0, 1)$. Důkaz je jednoduchý³⁸, platí

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y,$$

tedy $F_Y(y)$ je distribuční funkce rovnoměrného rozdělení. Tvrzení nám prakticky poslouží, pokud dokážeme najít inverzi kýžené distribuční funkce. Pak totiž dokážeme generovat náhodná čísla s distribuční funkcí $F(x)$ následujícím postupem.

1. Vygenerujeme náhodné číslo y s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0, 1)$.
2. Kýžené náhodné číslo x s distribuční funkcí $F(x)$ získáme transformací $x = F^{-1}(y)$.

Problém je ale v tom, že musíme být schopni určit (ideálně analyticky) inverzi distribuční funkce, což zdaleka nedokážeme pro každou distribuci. Pak je nutné se poohlédnout po jiných metodách.

Boxova-Mullerova transformace

Jednou z aplikací inverze distribuční funkce je efektivní metoda generování náhodných čísel s normálním rozdělením.³⁹ To má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Je známo, že integrál hustoty pravděpodobnosti, resp. distribuční funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, ale jenom jako tzv. chybová funkce, která je tímto integrálem definována. S nalezením jednoduché inverze se pak můžeme rozloučit. Můžeme ale použít trik. Vezmeme normální rozložení ve dvou dimenzích s navzájem nekorelovanými složkami

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

neboli v polárních souřadnicích

$$f(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}}$$

a pokusme se spočítat distribuční funkci vzhledem k radiální souřadnici

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\varrho, \vartheta) \varrho \, d\vartheta \, d\varrho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho \, d\vartheta \, d\varrho \\ &= \int_0^r e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho \, d\varrho \quad \left/ \begin{array}{l} t = \frac{\varrho^2}{2}, \\ dt = \varrho \, d\varrho \end{array} \right. \\ &= \int_0^r e^{-t} \, dt = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}. \end{aligned}$$

³⁸Převzato z https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_integral_transform.

³⁹Neboli Gaussovým rozdělením se středem $\mu = 0$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$.

Nyní již můžeme distribuční funkci invertovat

$$F^{-1}(u_1) = \sqrt{-2 \ln(1 - u_1)}.$$

Pokud tento vztah použijeme ke generování náhodných čísel s distribucí $F(r)$, tedy u_1 bude mít rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pak má u_1 a $1 - u_1$ stejné rozdělení, můžeme tedy psát

$$r = \sqrt{-2 \ln u_1}.$$

Tato distribuční funkce ale nepopisuje 1D normální rozdělení, ale rozdělení dané 2D Gaussovým „kopečkem“. Pokud ale tento kopeček řízeme podél libovolného radiálního směru, dostaneme 1D normální rozdělení. Proto si vygenerujeme ještě jednu náhodnou proměnnou s rovnoměrným rozdělením u_2 na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která bude vyjadřovat úhel řezu. Pak proměnné x_1 a x_2 získané vztahy

$$x_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2),$$

$$x_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2)$$

mají normální rozdělení a jsou statisticky nezávislé. Podařilo se nám tedy najít způsob, jak dvě rovnoměrně rozdělená náhodná čísla transformovat na dvě normálně rozdělená náhodná čísla. Této transformaci se říká *Boxova-Mullerova transformace*.

Pro úplnost dodejme, že pokud máme náhodnou proměnnou s normálním rozdělením x , pak náhodná proměnná y získaná transformací

$$y = \mu + \sigma x$$

má Gaussovo rozdělení se středem μ a rozptylem σ^2 .

von Neumannova metoda

Tato metoda dokáže transformovat dvě rovnoměrně rozdělená náhodná čísla na jedno číslo rozdělené dle obecné hustoty pravděpodobnosti $f(x)$. Nejprve je potřeba zvolit číslo M takové, aby $\forall x, f(x) < M$. Dále najdeme meze a, b tak, aby v intervalu $\langle a, b \rangle$ ležela všechna x , pro která $f(x) > 0$. Pak aplikujme následující algoritmus.

1. Vygenerujeme náhodné číslo u_1 s rovnoměrným rozdělením v intervalu $\langle a, b \rangle$.
2. Vygenerujeme náhodné číslo u_2 s rovnoměrným rozdělením v intervalu $\langle 0, M \rangle$.
3. Pokud $u_2 < f(u_1)$, pak u_1 použijeme, jinak jej zahodíme.
4. Opakujeme od začátku.

Metoda funguje, protože pravděpodobnost, že bude hodnota u_1 přijata je rovna $f(u_1)/M$, je tedy úměrná hustotě pravděpodobnosti.

Z popisu algoritmu je vidět, že M musíme volit co možná nejmenší, jinak budeme velmi plynout náhodnými čísly. Tato metoda je ze stejného důvodu nevhodná pro hustoty pravděpodobnosti, které mají peak, či obecně velký rozptyl hodnot. Nicméně principiálně hustotu pravděpodobnosti takřka vždy známe, algoritmus jde tedy často použít, ač není optimální.

Metropolisův-Hastingsův algoritmus

Metropolisův-Hastingsův algoritmus je pozoruhodná aplikace náhodné procházky. Předpokládejme, že známe hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné veličiny, jejíž hodnoty chceme generovat. Zvolme si výchozí hodnotu x_0 a tzv. proposal density $g(x|y)$, neboli hustotu pravděpodobnosti návrhu přeskočení z bodu y do bodu x . Tato distribuce ale musí být symetrická ve smyslu, že musí platit $g(x|y) = g(y|x)$. Více si o ní povíme za chvíli. Nyní již můžeme generovat náhodná čísla dle následujícího algoritmu.

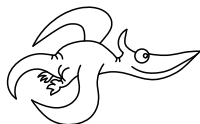
1. Vygenerujeme náhodného kandidáta pro novou polohu x' dle hustoty pravděpodobnosti $g(x'|x_i)$. (x_i je aktuální poloha)
2. Spočítáme koeficient přijetí $\alpha = f(x')/f(x_i)$.
3. Pokud $\alpha > 1$, pak novou polohu přijmeme ($x_{i+1} = x'$). Jinak vygenerujeme rovnoměrně rozdělené náhodné číslo u v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pokud $\alpha > u$, pak také krok přijmeme, jinak zůstaneme na místě ($x_{i+1} = x_i$).
4. Hodnotu x_{i+1} využijeme jako náhodné číslo s rozdělením $f(x)$. Iterujeme pro další hodnoty.

Algoritmus si tedy můžeme představit jako chození po horách (funkci $f(x)$). Jsme vášniví horolezci a čím jsme výš, tím jsme tam radši (nadmořská výška zároveň odpovídá hustotě pravděpodobnosti našeho výskytu). Odněkud vyjdeme a chceme udělat krok s náhodně zvolenou délkou (a směrem, neboť x je obecně vektor) dle distribuce $g(x'|x_i)$. Pokud bychom krokem vyšplhali výš, tak neváháme a jdeme tam. Pokud bychom sešli níž, tak se nám tam sice moc nechce, ale sem tam slézt musíme, tak si ještě hodíme kostkou (vygenerujeme náhodné číslo mezi nulou a naší aktuální nadmořskou výškou). Pokud je toto číslo menší než nadmořská výška, kam míříme, tak nám štěstí nepřálo a slezeme. Jinak zůstaneme kde jsme. Pak uděláme další náhodný krok ...

Vraťme se nyní k volbě distribuce $g(x|y)$. Jak už jsme zmínili, může to být libovolná distribuce splňující $g(x|y) = g(y|x)$ (ve zobecněné verzi algoritmu ani to nemusí platit), musíme si ale dát pozor na to, aby navrhované kroky ležely většinou v oblasti, kde je $f(x)$ nenulová. V opačném případě vzroste poměr zamítnutých kroků a spomalí se výpočet. Samozřejmě pak musíme volit distribuci $g(x|y)$ tak, abychom byli schopni rychle a spolehlivě generovat náhodné veličiny s daným rozložením. Tento samozřejmý fakt je ale zpravidla tím limitujícím, v praxi se tedy nejčastěji používá buď rovnoměrné rozdělení centrované v aktuální poloze y , nebo Gaussovo rozdělení opět se středem v aktuální poloze y .

Hned vidíme nedostatek tohoto algoritmu, a to je autokorelace. Pokud totiž nebudeme dělat zcela náhodně velké skoky přes celou oblast, budou sousední hodnoty vždy relativně blízko sebe, tedy korelované. Nicméně pro účely MC integrace, pokud použijeme dostatek hodnot, nám tato vlastnost příliš nevádí. Velkou výhodou tohoto algoritmu je pak to, že lze jednoduše a efektivně použít i ve vyšších dimenzích.

Správná volba distribuce délky kroku má zásadní důsledky. Představme si, že je $f(x)$ tvořena dvěma kopci a hlubokým údolím mezi nimi. Pak při malých krocích vyšplháme na jeden z vrcholů, ale už se nejspíš nedostaneme na ten druhý (museli bychom mít nehorázné štěstí a sejít do údolí). Příliš dlouhé kroky jsou také špatné, neboť bychom se příliš často strefovali do nižších partií, než kde jsme, a klesal by poměr nově přijatých kroků.



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
		6	6	6	6	7	10	12	10	63	100	127	
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	6	6	6	3	8	6	12	10	57	90	114	
2. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	4	6	6	5	7	4	11	–	43	84	90	
3. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	6	3	1	5	11	–	36	77	82	
4. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	4	6	5	4	4	4	11	–	38	79	71	
5. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	4	6	–	2	–	2	11	–	25	69	68	
6. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	7	4	4	10	–	–	37	94	65	
7. <i>Hana Slámová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	6	–	–	3	11	–	26	87	59	
8. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Ressela, Chrudim	2	6	5	1	1	3	10	–	28	62	56	
9. <i>Karolína Letochová</i>	G Šternberk	0	–	–	2	–	6	12	–	20	63	52	
10. <i>Jan Raja</i>	G, Nymburk	4	–	–	–	–	4	–	–	8	67	35	
11.–12. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	2	–	4	–	–	–	–	–	6	60	29	
11.–12. <i>Jiří Sztokowski</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	6	11	–	17	83	29	
13. <i>Lucie Urbanová</i>	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	23	
14. <i>Aleš Socha</i>	G a SOŠ, Frýdek-Místek	2	2	–	1	–	2	4	–	11	38	22	
15. <i>Mícheala Valkova</i>	G Česká, Bratislava	–	–	–	–	–	4	–	–	4	48	11	

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	6	6	7	10	12	10	63	100	127	
1. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	4	6	6	3	7	2	8	12	48	78	99	
2. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	6	2	4	7	12	–	43	85	93	
3. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	6	2	4	2	5	4	11	8	42	72	92	
4. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	4	6	6	3	1	4	11	–	35	72	84	
5. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	8	6	–	–	–	8	10	–	34	70	73	
6. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	6	6	6	6	2	9	12	4	51	87	71	
7. <i>Jonáš Havelka</i>	G Jírovcova, České Budějovice	4	6	6	3	5	3	–	–	27	76	63	
8.–9. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	9	13	–	22	91	52	
8.–9. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	6	6	2	–	–	7	–	–	21	74	52	
10. <i>Adam Křivka</i>	Cytilmet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	51	
11. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	–	–	7	7	–	4	–	–	18	86	50	
12. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Pisek	4	6	4	3	–	–	–	–	17	88	43	
13. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	–	6	5	4	–	2	5	–	22	62	42	
14.–15. <i>Aneta Vacková</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	4	–	–	4	75	36	
14.–15. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	4	–	2	–	–	2	7	–	15	52	36	
16. <i>Matěj Holubička</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	–	–	–	–	1	7	–	12	53	28	
17. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	12	–	12	108	26	
18. <i>Václav Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	0	6	–	–	0	3	–	–	9	46	22	
19. <i>Jan Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	3	–	3	–	–	6	57	20	
20. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	19	
21. <i>Daniel Krátký</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	18	
22. <i>Marek Nestěra</i>	G K. Sladkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	84	16	
23. <i>Josef Polášek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	15	
24. <i>Marcel Zdeněk</i>	SPŠ strojnická a SOŠ profesora Š	–	–	–	1	–	–	–	–	1	50	14	
25.–26. <i>Lucie Ambrožová</i>	G, Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	13	
25.–26. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	13	
27. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	12	
28.–29. <i>Marek Čermoch</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	10	
28.–29. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10	
30. <i>Lucia Krajčoviechová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	8	
31. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
32. <i>MERT UNSAL</i>	Bahcesehir HS for Sc and Tech,TR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	2	

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ	
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	3	3	6	6	7	10	12	10	57	100	115
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	2	3	5	3	7	10	13	12	55	<i>103</i>	<i>118</i>		
2. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	1	3	6	4	6	8	12	10	50	<i>93</i>	<i>107</i>		
3. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	2	3	3	7	6	11	11	46	<i>92</i>	<i>106</i>			
4. <i>Vojtěch Klimeš</i>	G, Třeboň	1	3	6	6	2	10	12	10	50	<i>85</i>	<i>98</i>		
5. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	3	6	6	3	10	9	10	47	<i>85</i>	<i>95</i>		
6. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	6	2	3	7	9	9	41	<i>81</i>	<i>93</i>		
7. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	3	3	6	3	7	7	11	–	40	<i>82</i>	<i>78</i>		
8. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	2	3	7	4	1	6	12	–	35	<i>80</i>	<i>76</i>		
9. <i>Petr Zahradník</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	1	3	6	3	3	2	10	7	35	<i>69</i>	<i>66</i>		
10. <i>Marko Bermell</i>	Slovanské G, Olomouc	1	3	5	6	1	8	10	–	34	<i>65</i>	<i>62</i>		
11. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	2	3	4	–	–	–	12	–	21	<i>77</i>	<i>58</i>		
12. <i>Tomáš Drobil</i>	G Dačice	–	1	6	–	–	3	–	2	18	<i>66</i>	<i>57</i>		
13. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	3	1	3	2	–	11	10	–	30	<i>69</i>	<i>54</i>		
14.–15. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	–	3	–	–	–	8	12	–	23	<i>86</i>	<i>48</i>		
14.–15. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	1	3	6	3	7	3	–	–	23	<i>75</i>	<i>48</i>		
16. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	3	6	4	–	–	–	–	13	<i>90</i>	<i>37</i>		
17. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>75</i>	<i>36</i>		
18. <i>Samuel Amrich</i>	G Poštová, Košice	–	3	–	3	–	–	–	2	8	<i>61</i>	<i>30</i>		
19. <i>Mária Poláčková</i>	G Velká okružná, Žilina	–	3	–	–	–	–	–	–	3	<i>84</i>	<i>26</i>		
20. <i>Daniël Staník</i>	G Uničov	–	–	–	–	–	3	–	–	3	<i>58</i>	<i>25</i>		
21. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	10	–	10	<i>85</i>	<i>23</i>		
22.–23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	–	3	6	3	–	–	–	–	12	<i>88</i>	<i>21</i>		
22.–23. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	–	–	6	–	–	–	–	–	6	<i>100</i>	<i>21</i>		
24. <i>Daniël Pitoňák</i>	G a SOŠP, Čáslav	–	3	3	1	–	2	8	–	17	<i>50</i>	<i>20</i>		
25. <i>On Tai Wu</i>	Li Po Chun UWC, Hong Kong	1	3	6	7	–	–	–	–	17	<i>94</i>	<i>17</i>		
26.–27. <i>Adéla Foglarová</i>	G, Špitálská, Praha	–	3	–	–	–	–	11	–	14	<i>93</i>	<i>14</i>		
26.–27. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	–	–	3	–	–	–	–	–	3	<i>54</i>	<i>14</i>		
28. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	2	–	–	–	–	–	11	–	13	<i>87</i>	<i>13</i>		
29.–30. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>83</i>	<i>10</i>		
29.–30. <i>Martin Škoudlil</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>59</i>	<i>10</i>		
31. <i>Jana Pekařová</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	9	–	9	<i>75</i>	<i>9</i>		
32. <i>Zuzana Fialková</i>	Sunny Can. International Sch.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>67</i>	<i>8</i>		
33. <i>Richard Veselý</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>38</i>	<i>5</i>		
34.–35. <i>Dominik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>100</i>	<i>3</i>		
34.–35. <i>Míchal Jůza</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>100</i>	<i>3</i>		
36. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	1	–	–	–	–	–	–	–	1	<i>33</i>	<i>1</i>		

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	6	6	7	10	12	10	57	100	115	
1. Šimon Pajger	G Velká okružná, Žilina	2	3	5	5	7	9	10	11	52	84	97	
2. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	3	3	5	5	–	11	13	–	40	107	94	
3. Tomáš Červeň	G V. P. Tótha, Martin	2	3	6	6	2	10	12	3	44	79	85	
4. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	4	–	6	–	7	6	11	–	34	84	81	
5. David Němec	G, Tanvald	2	3	3	4	4	5	12	1	34	70	80	
6. Katarína Častulíková	1. súkromné G v Bratislave	2	3	5	2	2	5	11	–	30	80	76	
7. Jáchym Bareš	G, Olomouc-Hejčín	3	3	6	4	2	4	–	–	22	61	51	
8. Dominik Starý	G, Benešov	–	3	6	3	–	4	10	–	26	81	43	
9. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	3	1	6	–	–	2	8	–	20	57	41	
10. Miroslav Hrabal	G, Olomouc-Hejčín	–	3	5	–	–	1	–	–	9	67	33	
11. Jan Kučera	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	31
12.–13. Ján Pavlech	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	2	3	6	–	–	–	–	–	11	81	25	
12.–13. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	1	2	1	–	–	5	–	–	9	48	25	
14. Soňa Burešová	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	105	23	
15. Filip Keller	G P. de Coubertina, Tábor	–	3	4	–	–	–	–	–	7	65	20	
16. Ondřej Buček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	1	2	6	3	–	–	–	–	12	67	12	
17. Adéla Hanková	První české G, Karlovy Vary	–	3	6	–	–	–	–	–	9	100	9	
18. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	7	
19. Dominick Ivan	ŠG PinkHarmony, Zvolen	1	–	–	–	–	3	–	–	4	25	5	




FYKOS

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.