Úloha IV.P ... dietní věž

5 bodů; průměr 2,71; řešilo 38 studentů

Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovek od dietního nápoje kolového typu?

Michal z `http://what-if.xkcd.com/88/`

Pri stavaní veže z plechoviek musíme riešiť ako u každej stavby niekoľko problémov. Na prvý problém nás upozorní statik. Vežu ničím nelepíme a len staviame plechovky na seba, teda si musíme dávať pozor, aby sme ich stavali dokonale rovno. A hneď sa nám ozve ďalší odborník: a čo materiál? Veď hliník je celkom mäkký kov a na plechovky sa používa tenký plech. A potom aj miesto je dôležité. Kde budeme našu vežu stavať, ako ovplyvní stavbu počasie? Zafúka vietor a vežu nám zborí. Poďme si teda rozobrať postupne všetky úskalia.

Výška veže s ohľadom na materiál

Typy plechoviek sa od seba výrazne líšia. My sme zvolili väčšiu plechovku s objemom 0,5 l (predsa len chceme stavať vežu do výšky). Váha takej hliníkovej plechovky sa pohybuje okolo $m_1 = 20\,\mathrm{g}$. Najskôr sa skúsme zamyslieť nad tým, čo sa deje, keď plechovku zaťažíme. Isto ste niekedy skúšali stúpiť na plechovku a tak ju „zdemolovať“. Avšak sem-tam sa stalo, že ste sa postavili na plechovku a tá vás bez problémov uniesla. Ako to?

Ak si plechovku predstavíme ako homogénne medzivalčie, tak vás neprekvapí, že ak na vrchnú stenu budeme pôsobiť silou, tak sa všetká prenesie do podstavy a deformácia bude vo všetkých miestach rovnaká. Keď však napätie v materiáli prekročí medz pevnosti, materiál sa poškodí a naša veža padne. Medza pevnosti pre hliník je približne $\sigma_{\mathrm{Al}} \doteq 50\,\mathrm{MPa}$. Najslabšie miesto celej plechovky je bočná stena. Ak odhadneme[1] jej hrúbku ako $t = 0{,}2\,\mathrm{mm}$ a polomer plechovky na $r = 3\,\mathrm{cm}$, dostávame približný prierez steny plechovky ako $S = 2\pi rt$. Po dosadení máme približný odhad $S = 3{,}8\,10^{-5}\mathrm{m}^2$.

Takže už jednoducho spočítame, aké zaťaženie spôsobené hmotnosťou m znesie jedna plechovka:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{Al}} &= \frac{F_{\mathrm{g}}}{S}\,,\\ \sigma_{\mathrm{Al}}S &= F_{\mathrm{g}}\,,\\ 2\pi rt\sigma_{\mathrm{Al}} &= mg\,,\\ m &= \frac{2\pi\sigma_{Al}rt}{g}\,.\end{aligned}$$

Z čoho po dosadení dostávame $m = 200\,\mathrm{kg}$. Prečo ale toto v praxi nefunguje stále? V prvom rade plechovka nie je úplne homogénna. Vyskytne sa slabé miesto, v dôsledku čoho rozloženie zátaže nebude rovnomerné a na steny plechovky budú pôsobiť aj sily nerovnobežné zo stenou. Síce stena plechovky je odolná, keď na ňu pôsobíme pozdĺž steny, ale slabšia, keď pôsobime kolmo na stenu. Tak poďme ešte spočítať, koľko by sme dokázali takých dokonalých plechoviek poukladať na seba. Jednoducho

$$n = \frac{m}{m_1}\,.$$

Z toho dostávame $n = 10\,000\,\mathrm{ks}$, jednoducho si spočítame aj výšku, ktorá dosahuje $h = 1\,800\,\mathrm{m}$ pri výške plechovky $h_1 = 18\,\mathrm{cm}$.

[1] Informácie o použití hliníka vo výrobe plechoviek nájdete napríklad tu: `http://packaging.world-aluminium.org/benefits/lightweight.html`.

Stabilita veže

Predpokladajme teda, že máme dokonalé homogénne plechovky a dokážeme postaviť 10 000 plechoviek na seba. Je nám jasné, že plechovky musíme ukladať s veľkou presnosťou. Aby nám takáto veža nespadla, musí platiť, že priemet ťažiska do roviny podstavy je stále „v podstave“. Ako bolo spomenuté, tak polomer podstavy je $r = 3\,\mathrm{cm}$, a teda ťažisko sa nesmie vychýliť o viac ako polomer. Teda musíme plechovky ukladať s presnosťou $\delta = 2r/n = 6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Toto je iba extrémny prípad, ak by sme uvažovali pri každom uložení rovnakú systematickú asymetrickú chybu položenia. Reálne chyba skôr prislúcha náhodnemu rozloženiu, približne gaussovskému. V prípade gaussovského rozdelenia by sme dostali chybu položenia o tri rády vyššiu, ale aj tak presnosť ostáva rádovo na desatinách milimetra, čo je pre obyčajnú plechovku a ruku človeka stále nedosiahnuteľný cieľ.

A čo keby sme mali dokonalé plechovky a dokonalý stroj na stavanie? Čo všetko by taká veža vydržala? Ako by pôsobili "veľkí nepriatelia stavieb" ako silný vietor, zemetrasenie, tornádo, výbuch sopky, cunami, pád meteoritu, prelet veľkej čiernej diery v blízkosti našej veže…

Skoro každý z týchto scenárov sa dá previesť na problém, čo sa stane, keď nám do stavby fúkne vietor. Predstavme si našu vežu tentokrát ako veľký dutý valec o polomere $r = 3\,\mathrm{cm}$ a výške $h = 1\,800\,\mathrm{m}$. Predpokladajme, že vietor fúka v celej výške konštantnou rýchlosťou v.

Veža sa nám prevrhne, keď moment sily vetra bude väčší ako moment sily tiaže veže. Veža sa nám bude otáčať (padať) okolo hrany podstavy, teda aj voči nej budeme vzťahovať momenty síl. V tabuľkách si nájdeme súčiniteľ odporu, ktorý sa pre valec pohybuje okolo $C = 0{,}5$. Vietor, ktorý pôsobí na istú časť plochy veže o výške $\mathrm{d}h$, nám spôsobí silou veľkosti $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ a momentom sily $\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$. Využijeme Newtonov vzorec pre odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2}C\varrho v^2 S\;,$$

kde ϱ je hustota vzduchu, v rýchlosť vetra a S je prierez veže, v našom prípade $S = 2rh$. Ak chceme len diferenciál sily $\mathrm{d}F$ prislúchajúcej istej elementárnej ploche $\mathrm{d}S$, tak platí

$$\mathrm{d}F = \frac{1}{2}C\varrho v^2\mathrm{d}S\;,$$
$$\mathrm{d}F = C\varrho v^2 r\mathrm{d}h\,.$$

Ale pozor, táto sila pôsobí kolmo na plochu, nie na vektor $\boldsymbol{R}$. Teda potrebujeme vedieť jej určitý priemet. Zároveň si musíme uvedomiť, že naša veža je veľmi vysoká, presnejšie $h \gg r$, a pre veľké výšky platí

$$F \approx F_{\mathrm{priemet}}\,,\quad R \approx h\,.$$

Potom môžeme spočítať aj veľkosť momentu sily ako

$$\mathrm{d}M = hC\varrho\tau^2 r\mathrm{d}h\,,$$
$$M = \int_0^h h'C\varrho v^2 r\mathrm{d}h'\,,$$

lebo chyba spôsobená integráciou pri malých h' bude tiež malá.

$$M = C\varrho v^2 \int_0^h h' r \mathrm{d}h' \,,$$

$$M = C r \varrho v^2 \frac{1}{2} [(h')^2]_0^h \,,$$

$$M = \frac{1}{2} C r \varrho v^2 h^2 \,.$$

Moment, ktorý vytvára tiažová sila, spočítame ako

$$M = F_\mathrm{g} r \,.$$

Potom z rovnosti momentov spočítame medznú podmienku rýchlosti vetra.

$$F_g r = \frac{1}{2} C r \varrho v^2 h^2 \,,$$

$$mg = \frac{1}{2} C \varrho v^2 h^2 \,.$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho h^2}} \,.$$

Po dosadení dostávame medznú rýchlosť $v = 0{,}05\,\mathrm{ms^{-1}}$. Takže našu vežu zhodí aj „bezvetrie“. Na tomto mieste je nutné spomenúť, že pre malé rýchlosti nebude prúdenie turbulentné, ale laminárne, čo by náš odhad mierne zväčšilo.[2]

A čo tak teroristi alebo neprajníci?

Určite, keď postavíte najvyššiu vežu z plechoviek, tak sa nájdu neprajníci, ktorý vám vašu vežu budú chcieť zbúrať.

Tak si predstavme nášho nepriateľa: ten príde k veži a bude sa ju snažiť zhodiť tým, že na ňu začne tlačiť.

Keď využijeme úvahu ako v predchádzajúcom prípade, tak môžeme povedať, že veža začne padať, keď moment sily od nášho nepriateľa bude väčší ako moment tiažovej sily. Predpokladáme, že nepriateľ je vysoký, a teda pôsobí na vežu vo výške $v_n = 2\,\mathrm{m}$ silou F_n.

$$F_\mathrm{g} r = F_\mathrm{n} h_\mathrm{n} \,,$$

$$F_\mathrm{n} = \frac{F_\mathrm{g} r}{h_\mathrm{n}} \,.$$

Po dosadení dostávame hodnotu sily $F_\mathrm{n} = 265\,\mathrm{N}$, z čoho jasne vidíme, že nepriateľ by nemal problém ju zbúrať len opretím sa o našu vežu. Nezabúdajte však, že plechovky považujeme za homogenný dutý valec, prítomnosť plošiek medzi plechovkami by silu ešte znížila.

A čo keby sa rozhodol, že by podkopol spodnú plechovku?

V prvom rade, ak takáto sila bude pôsobiť na stenu spodnej plechovky, tak veľmi isto nám spodnú plechovku zdemoluje a tá stratí svoju nosnosť a veža nám spadne. Rozumný a dostatočne

[2] Hodnoty Reynoldsovho čísla pre náš prípad si môžete zistiť napríklad tu: `http://www.engineeringtoolbox.com/reynolds-number-d_237.html`.

presný fyzikálny model pre prípad bočnej deformácie je už náročné vytvoriť, ale sami isto viete, že plechovky sú v tomto ohľade veľmi „tvárne“.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.