

Úloha IV.4 ... bubliny znovu spojeny! 4 body; průměr 2,45; řešilo 53 studentů

Kolik nejméně stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru r se musí spojit, aby vytvořily jednu bublinu, která má poloměr alespoň $3r$? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu.

Karel se díval na bublifuk.

Aby byla bublina v rovnováze, musí se vyrovnat kapilární tlak mýdlové membrány p_k , atmosférický tlak p_a a tlak plynu p uvnitř, tedy musí platit

$$p = p_k + p_a .$$

Kapilární tlak mýdlové membrány je

$$p_k = \frac{4\sigma}{r} ,$$

kde σ je povrchové napětí membrány a r je poloměr bubliny. Dále uvažujme zjednodušující předpoklad, že vzduch v bublině se chová jako ideální plyn. Ten má stavovou rovnici

$$pV = nRT ,$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, n látkové množství, R univerzální plynová konstanta a T teplota. Pro jednu malou bublinu o poloměru r tedy z rovnosti tlaků plyne

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sigma}{r} + p_a\right) V_1 &= n_1 RT , \\ \left(\frac{4\sigma}{r} + p_a\right) \frac{4}{3}\pi r^3 &= n_1 RT , \\ n_1 &= (4\sigma + p_a r) \frac{4\pi r^2}{3RT} , \end{aligned}$$

kde jsme v druhém kroku použili fakt, že bublina je kulová. Obdobně získáme látkové množství ve velké bublině o poloměru $3r$

$$n_2 = (4\sigma + 3p_a r) \frac{4\pi(3r)^2}{3RT} .$$

Nyní podílem získáme

$$\frac{n_2}{n_1} = 9 \frac{4\sigma + 3p_a r}{4\sigma + p_a r} \stackrel{\text{def}}{=} f(r) ,$$

což je lineární lomená funkce. Protože σ i p_a mají kladnou hodnotu, je funkce pro $r \in (0, +\infty)$ rostoucí, $f(0) = 9$ a $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = 27$. Potřebujeme tedy něco mezi 9 a 27 bublinami v závislosti na okolním tlaku, povrchovém napětí a poloměru bublin.

Nakonec si vypočítejme potřebný počet pro běžné hodnoty. Necht atmosférický tlak je standardních 101 kPa, povrchové napětí mýdlové membrány¹ 25 mN·m⁻¹ a poloměr malých bublin 1 cm. Potřebný počet pak je 27. Z monotonie $f(r)$ je vidět, že pro větší poloměr bublin budeme tím spíš v tomto limitním případě.

¹http://physics.about.com/od/physicsexperiments/a/surfacetension_5.htm

Komentáře k došlým řešením

Mnoho z vás uvažovalo, že se musí zachovávat celkový objem bublin. V tomto případě to sice platí, protože je děj dle zadání izotermický a zároveň lze zanedbat změnu tlaku, nicméně jde o netriviální výsledek vzešlý až z výpočtu výše. Zachování objemu lze obecně uvažovat u nestlačitelných látek, nikoliv však u plynů. Co se ale musí zachovávat je celkové látkové množství plynu, protože zde neprobíhá žádná chemická reakce a jde o uzavřený systém.

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.