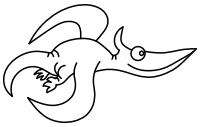
Úvodem

Milí FYKOSáci,
pokud se strachujete, že si o Vánocích nebudete užívat ničeho jiného než klidu a míru, můžete své obavy ihned zaplašit, protože se vám do ruky právě dostala brožurka se zadáním třetí série FYKOSu. V minulé sérii jste si vedli velice dobře, nová várka úloh zaměřených především na mechaniku vám jistě půjde ještě lépe. Těšit se můžete také na další díl seriálu, ve kterém se seznámíte s novou stavovou veličinou zvanou entropie. Abyste byli více motivovaní, tak vězte, že máte poslední možnost nasbírat v tomto pololetí body, které vás mohou dostat na jarní soustředění. Takže s chutí do počítání! Šťastné a pohodové Vánoce a spoustu skvělých nápadů při pojídání cukroví přejí

Organizátoři



Zadání III. série

Termín uploadu: 19. 1. 2016 23.59
Termín odeslání: 18. 1. 2016

Úloha III.1 ... bláznivá rybička

2 body

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem $r = 10\,\mathrm{cm}$ plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez $S = 5\,\mathrm{cm}^2$, Newtonův odporový koeficient $C = 0{,}2$ a plave rychlostí $v = 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte.

Úloha III.2 ... alchymista začátečník

2 body

Náš nejmenovaný mladý alchymista, říkejme mu Jirka N., se naučil používat elektrolýzu a měřit elektrochemický ekvivalent látky. Dokonce se mu podařilo naměřit u jednoho vzorku hodnotu elektrochemického ekvivalentu relativně přesně, a to $A = (6{,}74 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}C^{-1}}$. Ale sám si neví rady, jak určit, o jakou látku se jedná. Poraďte mu!

Úloha III.3 ... kdy vyskočí?

3 body

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti k. Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti m, na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti M. Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti M bude ležet na desce a závaží o hmotnosti m bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny v tomto stavu je l. Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti M nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

Úloha III.4 ... ubrzdi to

4 body

Po sebeprudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu t_r lineárně narůstá až na hodnotu F_m. Koeficient statického tření mezi pneumatikou

a vozovkou je f. Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku?

Úloha III.5 ... sešit dezertér

5 bodů

Na lavici se sklonem $\alpha = 5°$ leží sešit formátu A4 o hmotnosti m, mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem $f_0 = 0{,}52$. Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$ a amplitudou $A = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačit (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.
b) Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je f, sešit považujte za tuhou desku.

Úloha III.P ... Lukášova díra

5 bodů

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?

Úloha III.E ... hydrogel

8 bodů

Změřte závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě.

Poznámka Hydrogel vám má přijít společně se zadáním série. Pokud jste v tomto ročníku ještě žádnou úlohu neřešili, ale chcete hydrogel také dostat, ozvěte se nám.

Úloha III.S ... entropická

6 bodů

a) Všechny stavy ideálního plynu umíme nakreslit do různých diagramů: pV diagram, pT diagram a tak dále. Na svislou osu se vynáší první veličina, na vodorovnou osu se vynáší druhá veličina. Každý bod tedy určuje dva parametry.

   Načrtněte do pV diagramu čtyři děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to samé pro Tp diagram. Jak by vypadal UT diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných projeví na tomto obrázku.
b) Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?
c) V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Proveďte obdobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.
d) Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku $S(p, V)$ může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se též nemění při adiabatickém procesu. Jaký je to výraz? Nakreslete do pV diagramu (svislá osa je p, vodorovná V) křivky, na nichž je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?
e) Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci $S(p, V)$, $S(T, V)$, a $S(U, V)$.

Řešení II. série

Úloha II.1 ... potkan na ledě

2 body; průměr 1,09; řešilo 80 studentů

Na ledě běží potkan rychlostí v. Najednou se rozhodne, že se chce otočit o 90° tak, aby po otočení běžel pořád rychlostí o velikosti v, ale v novém směru. Jaký nejmenší čas na to potřebuje? Předpokládejte, že potkaní nožičky se mohou po ledě pohybovat nezávisle; koeficient tření mezi nožičkami a ledem je f. *Xellos dostal smyk.*

Když chce potkan zatočit co nejrychleji, musí využít veškeré zrychlení, které je mu třecí síla schopna poskytnout. Proto bude co nejusilovněji pohybovat všema nohama na jednu stranu. Velikost jeho zrychlení bude

$$a = fg\,.$$

V soustavě spojené s ledovou podložkou se potkan pohybuje s rychlostí $\boldsymbol{v}_1 = (v, 0)$ a chce se zatočit tak, aby byla jeho rychlost $\boldsymbol{v}_2 = (0, v)$. Dívejme se na problém ze soustavy pohybující se rychlostí v spolu s potkanem (jakmile začne potkan zatáčet, naše soustava bude stále pokračovat původní rychlostí v původním směru). V této potkaní soustavě je na začátku potkan v klidu a na konci má rychlost

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (-v, v)\ .$$

V tuto chvíli se problém změnil na jednorozměrný (zrychlení z klidu na pevně danou rychlost $\boldsymbol{v}_3$). Pro rovnoměrně zrychlený pohyb platí

$$|\boldsymbol{v}_3| = at\,.$$

Zároveň víme, že

$$|\boldsymbol{v}_3| = |(-v, v)| = v\sqrt{2}\,.$$

Když tyto poznatky spojíme, získáme

$$t_{\min} = \frac{|\boldsymbol{v}_3|}{a} = \frac{v\sqrt{2}}{fg}\,,$$

což je minimální čas potřebný k tomu, aby se potkan na ledě otočil o 90°. Pro lepší představu odhadneme číselné hodnoty: potkan běží rychlostí $v = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a součinitel smykového tření mezi potkaní nohou a ledem je $f = 0{,}1$. Otočení o 90° mu zabere nejméně 5 s.

Komentáře k došlým řešením

Bohužel většina z vás předpokládala, že nejrychleji se potkan otočí, pokud se bude pohybovat po kružnici. Jak je vidět z autorského řešení, lze nalézt i kratší čas. Když se zamyslíte nad tím, že v inerciální soustavě spojené s ledem se směr ani velikost zrychlení potkana nemění (jak jsme spočetli v autorském řešení), zjistíte, že případ je analogický šikmému vrhu, a tedy nejrychlejší trajektorie je parabola.

Dalším běžným problémem je, že jste si neuvědomili, že třecí síla ve skutečnosti pohání potkana. Potkan při odrazu nohou působí na led za sebe a podle zákona akce a reakce působí led (formou tření) na potkana ve směru dopředu.

Někteří z vás si také možná představují, že pokud potkanovi prokluzují nožičky (tedy působí na zem silou větší než mgf), už na něj nepůsobí žádné tření, ale není tomu tak. Stále na něj působí tření o mezní velikosti mgf. Pokud se liší koeficient statického f_0 a smykového tření f, při přechodu síly potkanovy nohy přes hodnotu mgf_0 se skokově sníží třecí síla z mgf_0 na mgf.

Ještě jedna poznámka ke tření – nepůsobí v každé složce pohybu zvlášť. Je třeba vektorově sečíst rychlosti všech složek pohybu potkana. Tření (ať už o velikosti mgf nebo méně) pak působí proti směru celkové rychlosti. V jednotlivých směrech pohybu pak působí pouze složka této celkové třecí síly.

Mnoho z vás si také plete, jak to vlastně je s dostředivou a odstředivou silou, a jak se soustavami spojenými s čím. V inerciální soustavě působí pouze skutečné síly (a jejich reakce). Pokud potkan zatáčí, znamená to, že výslednice těchto sil má složku kolmou na směr rychlosti, a tato složka má dostředivý účinek. Vzorec $F = mv^2/r$ dává pouze do souvislosti působící sílu a její vliv na pohyb potkana, tedy pedagogičtější by mohlo být psát vzorec ve tvaru $r = mv^2/F$. Oproti tomu v neinerciální soustavě rotující s konstantní úhlovou rychlostí ω působí navíc ještě odstředivá síla (která nemá žádnou reakci) a vyjádří se jako $F_O = m\omega^2 r$, v případě, že vektor úhlové rychlosti je kolmý na rovinu pohybu. Zároveň však i v této soustavě, pokud výslednice sil má složku kolmou ke směru pohybu v této soustavě, funguje tato složka jako dostředivá síla. Pokud si vybereme právě takovou rotující soustavu, která je spojená s potkanem, platí v ní $\omega r = v$ a výslednice skutečných sil se vyruší s odstředivou silou a na potkana v této soustavě nepůsobí žádná síla (což dává smysl, v soustavě spojené s potkanem musí mít potkan konstantní polohu).

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz

Úloha II.2 ... numismatická

2 body; průměr 1,45; řešilo 109 studentů

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr $d_1 = 1\,\mathrm{cm}$, druhá $d_2 = 2\,\mathrm{cm}$, obě mají tloušťku $h = 2\,\mathrm{mm}$. Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponoříme-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá.

Bonus *Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro?*

Mirek má radši mince než bankovky.

V tomto texte budeme používať nasledovné značenie: index 1, resp. 2 prislúcha menšej, resp. väčšej minci, podobne ako v zadaní. Indexy Hg, Au a Ag odpovedajú príslušným chemickým značkám daných prvkov čiže ortuť, zlato a striebro. V tomto texte sa vyskytnú aj kombinácie týchto indexov, napríklad $V_{1,\mathrm{Au}}$ je objem zlata v menšej minci.

Pre túto úlohu budeme používať tabuľkové hodnoty hustôt $\varrho_{\mathrm{Hg}} = 13\,546\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Au}} = 19\,320\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a $\varrho_{\mathrm{Ag}} = 10\,503\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Pre prípad, keď sú obe minca položené na sebe a ponorené do ortuti platí vzťah

$$m_1 g + m_2 g = (V_1 + V_2)\varrho_{\mathrm{Hg}} g\,, \tag{1}$$

Po použití základných vzťahov na výpočet objemu a hmotnosti valcov dostaneme zo vzťahu (1)

$$\varrho_2 = \varrho_{\mathrm{Hg}}\,(1 + k) - \varrho_1 k\,, \tag{2}$$

kde $k = (d_1/d_2)^2$. Hustoty daných mincí musia vyhovovať vzťahu (2).

Zo zadania vieme, že malá minca je celá zo zlata, čiže $\varrho_1 = \varrho_{\mathrm{Au}}$. Táto voľba nám presne určila aj hustotu väčšej mince zo vzťahu (2):

$$\varrho_2 = \varrho_{\mathrm{Hg}}\,(1+k) - \varrho_{\mathrm{Au}} k\,.$$

Teraz nám už len stačí určiť hmotnosti zlata a striebra v druhej minci. Pre jej hustotu platí vzťah

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{\varrho_{\mathrm{Au}} V_{2,\mathrm{Au}} + \varrho_{\mathrm{Ag}} V_{2,\mathrm{Ag}}}{V_2} = \frac{\varrho_{\mathrm{Au}} V_{2,\mathrm{Au}} + \varrho_{\mathrm{Ag}}\,(V_2 - V_{2,\mathrm{Au}})}{V_2}\,. \tag{3}$$

Z rovnice (3) nám plynie vzťah pre objem zlata v druhej minci

$$V_{2,\mathrm{Au}} = \frac{V_2\,(\varrho_2 - \varrho_{\mathrm{Ag}})}{\varrho_{\mathrm{Au}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}}\,.$$

Objem striebra v tejto minci môžeme dopočítať zo vzťahu

$$V_{2,\mathrm{Ag}} = V_2 - V_{2,\mathrm{Au}}\,.$$

Akonáhle poznáme objemy zlata a striebra v jednotlivých minciach, dopočítanie hmotnosti už nebude robiť problém. Použitím známeho vzorca $m = \varrho V$ dostávame. že $m_{1,\mathrm{Au}} = 3{,}0\,\mathrm{g}$, $m_{1,\mathrm{Ag}} = 0{,}0\,\mathrm{g}$, $m_{2,\mathrm{Au}} = 2{,}2\,\mathrm{g}$, $m_{3,\mathrm{Ag}} = 5{,}4\,\mathrm{g}$. Zo známych hmotností dopočítame hmotnostné percentá. Dostaneme, že v prvej minci sa nachádza 100 % zlata, zatiaľ čo vo väčšej sa nachádza približne 29 % zlata a 71 % striebra.

Bonus

V našom riešení sme použili predpoklad, že menšia minca je celá zo zlata. Aby však boli splnené podmienky zo zadania úlohy, stačí, aby hustota malej mince spĺňala podmienku $\varrho_{\mathrm{Hg}} < \varrho_1 \leq \varrho_{\mathrm{Au}}$. Pokiaľ teda hustota menšej mince túto podmienku spĺňa, vieme zo vzťahu

$$V_{1,\mathrm{Au}} = V_1 \frac{\varrho_1 - \varrho_{\mathrm{Ag}}}{\varrho_{\mathrm{Au}} - \varrho_{\mathrm{Ag}}}\,,$$

ktorý sme dostali analogickým postupom, ako je uvedený vyššie, vypočítať objem zlata v menšej minci. Následne vieme zo vzťahu

$$V_{1,\mathrm{Ag}} = V_1 - V_{1,\mathrm{Au}}$$

dopočítať objem striebra v menšej minci. Zo vzťahu (2) si vieme dopočítať hustotu väčšej mince. Počítanie hmotností a hmotnostných percent je už analogické postupu uvedenému vyššie.

Interval hmotnostných percent striebra v menšej minci je teda $[0; 52{,}4)$ %. Hmotnostné percento zlata v menšej minci už pre danú hodnotu hmotnostných percent striebra ľahko dopočítame.

Lýdia Janitorová
janitorova@fykos.cz

Úloha II.3 ... fatální upuštění

3 body; průměr 0,80; řešilo 79 studentů

Z rakety obíhající po kružnici ve výšce $h = 2\,000\,\mathrm{km}$ nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí $v = 5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ vůči lodi. Za jak dlouho dopadne?

Karel nemá rád šroubováky.

Pred tým, ako skrutkovač hodíme, obieha spolu s nami po kruhovej dráhe. Rýchlosť v_0, ktorou obieha, určíme z rovnosti odstredivej a gravitačnej sily $mv_0^2/r_0 = GMm/r_0^2$, kde M je hmotnosť Zeme a r_0 polomer pôvodnej dráhy, čím dostávame

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}\,.$$

Keďže skrutkovač vrhneme smerom do stredu Zeme, voči osi kolmej na rovinu dráhy prechádzajúcu stredom Zeme sa moment hybnosti nezmení. Keďže v perigeu (najnižšom bode na novej, eliptickej dráhe skrutkovača) bude rýchlosť znova kolmá na sprievodič, zo zachovania momentu hybnosti dostaneme

$$v_0 r_0 = v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}\,, \tag{4}$$

kde $v_0, r_0; v_\mathrm{p}, r_\mathrm{p}$ sú rýchlosti a vzdialenosti od stredu Zeme v momente pred hodením; resp. v perigeu. Tiež vieme, že na novej dráhe sa musí zachovávať energia. Pre energiu v momente po odhodení dostaneme

$$E_1 = \frac{m\left(v_0^2 + v^2\right)}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0}\,,$$

kde sme využili znalosť v_0. V perigeu bude energia vyzerať podobne a dostaneme podmienku zachovania energie

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0} = \frac{mv_\mathrm{p}^2}{2} - \frac{GMm}{r_\mathrm{p}}\,. \tag{5}$$

Čím už máme všetko, čo na riešenie potrebujeme. Stačí len vyriešiť sústavu rovníc (4) a (5), čím dostaneme kvadratickú rovnicu voči $1/r_\mathrm{p}$

$$0 = \frac{1}{r_\mathrm{p}^2} v_0^2 r_0^2 - 2GM\frac{1}{r_\mathrm{p}} + \frac{GM}{r_0} - v^2\,,$$

ktorej riešením po dosadení za v_0 dostaneme

$$\frac{1}{r_\mathrm{p}} = \frac{1}{r_0}\left(1 + \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}}\right) = \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right)\,,$$

kde sme vybrali riešenie so $+$, pretože ide o $1/r_\mathrm{p}$ a potrebujeme perigeum, teda nižšie r_p. Riešenie so znamienkom $-$ by nám dalo druhý bod, v ktorom platia všetky naše predpoklady, teda apogeum. Keďže vieme, že v našom prípade $v/v_0 \ll 1$, môžeme vzťah aproximovať

$$r_\mathrm{p} \approx r_0\left(1 - \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}}\right)\,.$$

Sem už stačí len dosadiť hodnoty zo zadania a následne odečíst polomer Zeme r_Z, dostaneme $r_\mathrm{p} - r_\mathrm{Z} \doteq 1\,998\,\mathrm{km}$, takže vyhodenie má len minimálny vplyv na dráhu skrutkovača a na Zem nedopadne.

Ak by sme chceli, aby na Zem dopadol (teda aby sme dostali $r_\mathrm{p} = r_\mathrm{Z}$), potrebovali by sme výrazne väčšiu rýchlosť v, a teda naša aproximácia už nemusí platiť. Dostaneme

$$\frac{1}{r_\mathrm{Z}} = \frac{1}{r_\mathrm{Z}+h}\left[1+\sqrt{\frac{(r_\mathrm{Z}+h)\,v^2}{GM}}\right],$$

z čoho vyjadríme potrebnú rýchlosť

$$v = \frac{h}{r_\mathrm{Z}}\sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{Z}+h}} = \frac{h}{r_\mathrm{Z}}v_0 \doteq 2{,}2\,\mathrm{km/s}\,.$$

Pre predstavu, keby sme takouto rýchlosťou hodili skrutkovač zo Zeme nahor, vyletel by do výšky skoro 250 km. Ešte zaujímavejšie ale je, že ak by sme takto aj dokázali skrutkovač odhodiť a ak by skrutkovač vážil 0,3 kg a my 60 kg, tak by nás spätný ráz vrazil do Zeme takou silou ako pád zo šiestich metrov.

Komentáre k došlým riešeniam

Značná časť z vás zabudla, že na to aby raketa bola na obežnej dráhe, potrebuje mať pomerne velkú rýchlosť, a tú si skrutkovač zachová. Častá chyba potom bola považovať zrýchlenie za konštantné, alebo určovať stredné zrýchlenie priemerovaním cez dráhu ako

$$a = \frac{1}{h}\int_R^{R+h}\frac{GM_z}{r^2}\mathrm{d}r\,,$$

to ale nefunguje. Ak si predstavíme tieto krátke úseky dr, ak v tomto úseku strávi teleso viac času (teda má nižšiu rýchlosť), efekt tohto zrýchlenia bude väčší. Integrál by teda musel byť cez čas a na to aby sme ho vyriešili ale potrebujeme poznať riešenie, ktoré sa snažíme nájsť a teda tadial cesta nevedie.

Nemalá časť z vás si myslela že sa skrutkovač bude pohybovať po špirále, pričom pôvodná rýchlosť rakety sa zachová ako tangenciálna rýchlosť a nebude vplývať na čas za ktorý dopadne. Podľa Keplerovho zákona vieme, že trajektórie v gravitačnom poli sú kuželosečky, a teda to špirála byť nemôže, vidno to ale aj napríklad zo zachovania momentu hybnosti: ak klesne polomer dráhy, pre zachovanie momentu hybnosti sa musí zvýšiť rýchlosť, čo vedie na väčšiu odstredivú silu, ktorá je úmerná $v^2/r \sim 1/r^3$ a teda bude zväčšovať polomer dráhy.

Filip Ayazi
filip@fykos.cz

Úloha II.4 ... svítíme si na zrcadla

5 bodů; průměr 3,86; řešilo 91 studentů

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou?
Bonus *Vyřešte úlohu pro n zrcadel.* *Karel se prohlížel v zrcadle.*

Než se pustíme do řešení, připomeňme si jednu důležitou vlastnost polopropustných zrcadel: Pokud zrcadlo z jedné strany propouští zlomek p dopadajícího světla a odráží $1-p$, tak také

nutně[1] z druhé strany propouští p a odráží $1-p$. Dále také víme, že se veškeré záření odrazí nebo projde, zrcadla se tedy nezahřívají.

Řešme úlohu nejprve pouze pro $n=2$. Po průchodu prvním zrcadlem projde zlomek záření p, po průchodu druhým zrcadlem p^2. Při dopadu na druhé zrcadlo se však také $p(1-p)$ odrazí zpět na první zrcadlo.[2] Část záření projde prvním zrcadlem do oblasti zdroje, zpět k druhému zrcadlu se vrátí $p(1-p)^2$ a druhým zrcadlem projde $p^2(1-p)^2$. Znovu se však odrazí $p(1-p)^3\ldots$ Takto bychom mohli pokračovat velmi dlouho, konkrétně do nekonečna. Stačí si však všimnout, že záření, které projde soustavou dvou zrcadel, prodělá 2 průchody a $2k$ odrazů, kde $k=0,1,2,\ldots$ Naším úkolem je tedy sečíst geometrickou řadu s kvocientem $(1-p)^2$

$$p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{2k}=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(1-p)^2\right]^k=p^2\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{p}{2-p}\,.$$

Po dosazení $p=1/2$ dostaneme, že zrcadlem projde $1/3$ záření.

Kdybychom nyní chtěli obdobně postupovat pro $n=3$, zjistíme, že nám přítomnost prostředního zrcadla naše výpočty značně ztíží. My se však nezalekneme a rovnou si ukážeme, jak úlohu vyřešit pro obecné $n\in\mathbb{N}$. Budeme postupovat indukčně. Stačí si totiž uvědomit, že soustavu dvou zrcadel můžeme označit za nový optický prvek, který propouští $P_2=p/(2-p)$ a odráží $1-P_2=2(1-p)/(2-p)$. Pak už můžeme opět použít jednoduchou geometrickou řadu. Pouze si nyní musíme lépe rozmyslet, kde vystupuje p a kde P_2. Dva průchody vytvoří prefaktor pP_2, kvocient řady bude $(1-p)(1-P_2)$. Potom

$$pP_2\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(1-p)(1-P_2)\right]^k=pP_2\frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)}\equiv P_3\,.$$

Zde jsme označili P_3 ako část záření, která projde optickou soustavou tří zrcadel. Po dosazení $p=$ $=1/2$ dostaneme

$$P_3=pP_2\frac{1}{1-(1-p)(1-P_2)}=\frac{p}{3-2p}=\frac{1}{4}\,.$$

Nyní si můžeme všimnout podobnosti

$$P_2=\frac{p}{2-p}\quad\text{a}\quad P_3=\frac{p}{3-2p}\,.$$

Možná vás napadne, že by tedy mohlo platit

$$P_n=\frac{p}{n-(n-1)p}\,,$$

konkrétně pro $p=1/2$

$$P_n=\frac{1}{n+1}\,.$$

Abychom ukázali, že hledaným řešením je skutečně zmíněná harmonická posloupnost $1/(n+1)$, využijeme našeho indukčního postupu a přepíšeme vztah pro $n=3$ pro obecné $n>1$

$$P_n=pP_{n-1}\frac{1}{1-(1-p)(1-P_{n-1})}=\frac{pP_{n-1}}{p+P_{n-1}-pP_{n-1}}\,.$$

[1] Jedná se důsledek zákonů termodynamiky.

[2] Jelikož $p=1/2$, mohli bychom psát $1-p=p$, budeme však postupovat obecněji. Stále ale používáme alespoň předpoklad, že všechna zrcadla mají stranu propouštějící p směrem ke zdroji.

Tento vztah dále upravíme do tvaru

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-1}}}\,.$$

Když dodefinujeme $P_1 \equiv p$, snadno už vyjádříme kýžený výsledek

$$P_n = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-1}}} = \frac{1}{\frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + \frac{1}{P_{n-2}}} = \cdots = \frac{1}{(n-1)\frac{1-p}{p} + \frac{1}{p}} = \frac{p}{n-(n-1)p}\,.$$

Všimněme si, že posloupnost konverguje k nule, což fyzikálně znamená, že i skrz velmi dobře propustná skla neuvidíme, pokud jich bude v řadě velký počet.

Komentáře k došlým řešením

Velká část z vás měla řešení dobře, což nás samozřejmě těší. Jen bychom chtěli připomenout, že u každé úlohy, a zvláště více matematicky zaměřených, je potřeba nalezené řešení dobře zdůvodnit a pečlivě popsat postup. Na tom jste občas zbytečně ztráceli body, ačkoli jste jinak uvažovali správně. Někteří z vás odhalili, že po průchodu paprsku prvním zrcadlem a dopadu na druhé se úloha stává symetrickou a lze ji vyřešit zcela bez použití řad. Takovým způsobem šlo několika málo řádky textu získat pět bodů, což se vám jistě bude hodit. Asi jediným větším zádrhelem bylo uvědomění si, že zrcadlo v zadání musí odrazit stejnou část záření, jako propustí. Pokud nejste zběhlí ve vyšetřování termodynamických systémů, tak vám to nemusí být ihned zřejmé. Zdůvodnění proto nebylo bodově hodnoceno. Pokud však někdo odrazy neuvažoval, dostal obvykle pouze jeden bod za snahu, protože bohužel řešil jinou úlohu.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha II.5 ... je šišaté, bude s ním veselo 5 bodů; průměr 3,43; řešilo 49 studentů

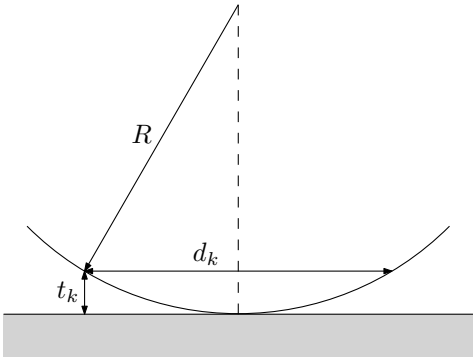
Mirkovi během zimních měsíců přišlo, že má doma na čtení příliš šero. Usmyslel si proto, že nechá do zdi pokoje vybourat otvor pro další okno. Nejdřív se ale vydal do sklářství koupit okenní tabulku. Moc se mu líbila jedna kruhová, ale ještě než ji koupil, potřeboval prozkoumat, jestli není sklo příliš křivé (vypuklé). Položil tabulku na dokonale rovnou skleněnou desku na pultě obchodu a pozoroval duhové kroužky, které vznikly kolem středu tabulky interferencí kolmo dopadajícího bílého světla na vzduchové mezeře mezi skly. Mirek náhodně vybral dva sousední červené kroužky ($\lambda \approx 700\,\mathrm{nm}$) a pravítkem změřil jejich průměry $d_\mathrm{k} = (10{,}5 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$ a $d_{\mathrm{k}+1} = (13{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{mm}$. Na základě těchto údajů už dokázal určit poloměr křivosti kruhového skla. Určete ho i vy a zamyslete se nad tím, s jakou přesností byl stanoven.

Mirek si nechce zkazit oči.

Zadání úlohy popisuje dobře popsaný jev interference světla na tenké vrstvě proměnné tloušťky. Vzniklé duhové kroužky se nazývají Newtonovy. Ke studiu problému nám pomůže nákres na obrázku 1.

Interference světla odraženého na kruhové části a na rovné skleněné desce bude záviset na tloušťce vzduchové vrstvy t. Pomocí Pythagorovy věty nalezneme vztah

$$\left(\frac{d_\mathrm{k}}{2}\right)^2 = R^2 - (R-t)^2 \approx 2Rt \tag{6}$$



Obr. 1: Kolmý řez skly s vyznačeným průměrem kroužku d_k, poloměrem křivosti R a tloušťkou vzduchové vrstvy t_k.

mezi poloměrem křivosti vypuklého skla R a tloušťkou vzduchové vrstvy t_k v místě, kde pozorujeme kroužek. Jelikož vyklenutí skla musí být malé, aby bylo vůbec možné kroužky pozorovat, použili jsme aproximaci $R \gg t$. Vyjádříme tloušťku

$$t = \frac{d_\mathrm{k}^2}{8R}\,. \tag{7}$$

Dále víme, že kroužky představují interferenční maximum, vlny tedy musí být fázově posunuty o celistvý násobek vlnové délky $k\lambda$. Kromě dráhového rozdílu t_k nesmíme zapomenout na skutečnost, že na rovinné destičce dochází k odrazu zpět do opticky řidšího prostředí. V takovém případě se fáze vlny posune[3] o $\lambda/2$ Celkem tedy na tloušťku vrstvy klademe požadavek

$$2t_\mathrm{k} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda\,,$$

po úpravě

$$t_\mathrm{k} = (2k-1)\frac{\lambda}{4}\,.$$

V našem případě pracujeme se sousedními maximy, dostaneme tedy

$$t_{k+1} - t_\mathrm{k} = \frac{\lambda}{2}\,.$$

S využitím vztahu (7) dostaneme rovnost

$$t_{k+1} - t_\mathrm{k} = \frac{\lambda}{2} = \frac{d_{k+1}^2 - d_\mathrm{k}^2}{8R}\,.$$

Z ní už vyjádříme hledaný poloměr

$$R = \frac{d_{k+1}^2 - d_\mathrm{k}^2}{4\lambda} \doteq 21\,\mathrm{m}\,. \tag{8}$$

[3]Pokud vás zajímá fyzikální zdůvodnění tohoto jevu, hledejte heslo *Fresnelovy vzorce*. Jako mechanická představa poslouží odraz vlny na pevném konci. Skutečnost, že se tento posun později ve výpočtech odečte, nás neopravňuje ho zde vynechat.

Rychlým pohledem na (6) odhadneme, že při průměru okna 0,5 m by byly okraje o 1 mm tenčí, což už je lehce na poměrnou vzhledem ke standardní tloušťce tažných skel 4 mm.

Nakonec nám úloha ukládá spočíst, s jakou přesností jsme poloměr stanovili. Označme σ_R nejistotu nepřímého měření poloměru a $\sigma = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ nejistotu měření délky. Z Gaussova kvadratického zákona hromadění chyb[4] nalezneme vztah

$$\sigma_R = \frac{\sigma}{2\lambda}\sqrt{d_{k+1}^2 + d_k^2} \doteq 6\,\mathrm{m}\,.$$

Nalezený poloměr je tedy $R = (21 \pm 6)\,\mathrm{m}$. Nejistota je poměrně velká, a i tak je pravděpodobně podhodnocená, protože na duhovém kroužku je nesnadné určit přesně barvu odpovídající $\lambda = 700\,\mathrm{nm}$. Hlavním zdrojem nejistoty je však skutečnost, že ve výrazu (8) pracujeme s rozdílem blízkých hodnot. Přesnost měření bychom tedy mohli vylepšit tím, že bychom pozorovali vzdálenější proužky $l - k > 1$ nebo že bychom použili monochromatické světlo a odečítali průměr kroužků v minimech, která jsou lépe rozlišitelná.

Komentáře k došlým řešením

Úloha dopadla dobře, pouze stručná poznámka: I když zjistíte, že se dá dohledat vzoreček, který velkou část úlohy skoro ihned řeší, musíte ukázat, že vzorci rozumíte. V tomto případě bylo potřeba vyřešit geometrii (nakreslit správný obrázek) a vysvětlit interferenci na tenké vrstvě. Za použití vzorce bez náležitého uvedení jsme obvykle odebrali dva body.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha II.P ... rodičovská

5 bodů; průměr 2,62; řešilo 74 studentů

Představte si, že za vámi přijde inteligentní sedmileté dítě a zeptá se: „A co je to ta supravodivost?“ Co všechno byste ho museli naučit a co vše mu postupně vysvětlit, abyste mu tento jev teoreticky mohli objasnit bez užití „lží dětem“[5] na odborné úrovni? Řešení zkuste rozpracovat co nejvíce. *Kiki doučovala a bez kuličkovitých elektronů se neobešla.*

Sedmileté dítě tuší, že existuje elektřina (Nestrkej ruce do zásuvky!, Nesahej na ten ohradník!). Také si všimlo, že elektřina je potřeba třeba k tomu, aby svítila lampička, a vede k ní ze zásuvky nějakým kabelem. Už ale asi neví, co to ta elektřina je a jak tyhle věci dělá. Před výkladem supravodivosti bychom se měli dostat k pojmům jako jsou proud, vodič, odpor.

Látky se skládají z malých částic, kterým říkáme atomy. Velikost jednoduchých atomů je řádově $1\,\text{Å} = 1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Atomy se dále skládají z dalších částí, malého ($1\,\mathrm{fm} = 1 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$) jádra uprostřed a dalších částic, elektronů, které se pohybují kolem jádra a tvoří jeho obal. Jádro se skládá z protonů a neutronů. Existuje řada vlastností, kterými se tyto částice liší. Pro nás bude důležitý náboj. Protony mají kladný náboj, neutrony žádný, celkově je proto jádro kladné. Elektrony mají záporný náboj. Každý náboj kolem sebe vytváří elektrické pole, do kterého když dáme náboj opačný, je k němu přitahován, a když do něj dáme náboj stejný, je odpuzován. Elektrony jsou tedy k jádru přitahovány. Zároveň však nemají z kvantové mechaniky dovoleno

[4] Jde o vztah, který budete potřebovat při většině fyzikálních měření. Jeho znění a další užitečné informace naleznete např. v knihovničce Fyzikální olympiády: `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf`

[5] Význam pojmu „lež dětem“ můžete najít v knížce Věda na Zeměploše; zjednodušeně se jedná o vysvětlení, které není úplně pravdivé, ale má pomoci danou věc alespoň zhruba pochopit, klasicky třeba představa atomů jako malinkatých, pevných kuliček

přiblížit se k jádru příliš blízko, proto zůstávají v pohybu v dovolených místech v blízkosti jádra a tvoří tak stabilní systém. Dále se ještě hodí vědět, že další vlastností, kterou mohou částice mít, je spin – elektrony mohou mít spin $1/2$ nebo $-1/2$.

Atomy mohou být v látkách uspořádány různými způsoby a podle toho pak mají různé vlastnosti. V následujícím textu budeme mluvit o skupině látek, které se říká kovy. Ty mají atomy uspořádány do nějaké pravidelné struktury, říkáme, že tvoří krystaly. Na těchto strukturách je speciální to, že jsou pevně vázána pouze jádra atomů – všechny vodivostní elektrony, tedy ty, které atom uvolní na interakci, vytvoří tzv. elektronový plyn, který může v krystalu rychle přenášet náboj. Pokud bude na jednom místě krystalu více kladného náboje než na druhém konci (říkáme, že je mezi nimi napětí), bude se záporný náboj, jehož nosiči jsou elektrony, pohybovat směrem ke kladnému náboji. Když se látkou šíří náboj nějakým směrem, říkáme, že látka vede elektrický proud. Látkám, které vedou elektrický proud dobře, říkáme vodiče. Proud je tedy uspořádaný pohyb náboje v čase.

Elektrony pohybující se v krystalu pociťují elektrická pole kladných nábojů a jsou tímto polem brzděny. Pro každý kov je toto brzdění jiné; charakterizuje jej vlastnost, které říkáme odpor.

Sedmileté dítě se také už setkalo s teplotou – když se vaří voda, řekneme, že má $100\,^{\circ}\mathrm{C}$, když zamrzá, má $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Nejnižší dosažitelná teplota je $-273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$. Ve fyzice se častěji používá jednotka Kelvin, K – jeden Kelvin má stejnou velikost jako jeden stupeň Celsia, avšak počátek stupnice je definovaný jako $0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$. Jádra atomů nejsou ve svých polohách napevno, spíše kolem nich kmitají, a to tím více, čím vyšší je teplota. Čím více kmitají, tím více brzdí pohyb elektrického proudu. Snižujeme-li tedy teplotu, odpor látky bude klesat.

Roku 1911, tedy před 104 lety, holandský fyzik Heike Kammerlingh Onnes dokázal pomocí tekutého helia zchladit látky na velmi nízkou teplotu, na $4\,\mathrm{K}$, a začal zkoumat vlastnosti látek za velmi nízkých teplot. Měřil odpor různých kovů a u některých zjistil, že odpor klesá s teplotou až do jisté teploty, která se pohybuje mezi $1\,\mathrm{K}$ a $25\,\mathrm{K}$, kdy odpor téměř skokově klesne na nulu. Látka přešla do zcela nového stavu, který označil za supravodivost. Za tyto objevy dostal Onnes v roce 1913 Nobelovu cenu.

K čemu je to dobré? Prochází-li vodičem elektrický proud, který vytváří proměnné elektrické pole (například pokud postupně zvětšujeme napětí), vytváří procesem elektromagnetické indukce také magnetické pole. Když látkou teče proud, tak se látka kvůli odporu zahřívá. Když je v supravodivém stavu, žádný odpor nemá, nezahřívá se a nic nebrání průchodu i velkých proudů, můžeme tak získat i silná a stálá magnetická pole. Magnet dítě zná, ví, že drží na ledničce. Permanentní magnet, tedy třeba ten na ledničce, má severní a jižní pól a vytváří kolem sebe magnetické pole. Když do tohoto pole vložíme další magnet, natočí se tak, aby severní pól směřoval k jižnímu a naopak.

Vysvětlit supravodivost se podařilo zatím u nízkoteplotních supravodičů I. druhu. Těmi jsou kovy, které v silných magnetických polích supravodivé vlastnosti zase ztrácí. Vysvětlení jevu spočívá v existenci tzv. Cooperových párů elektronů. Dva elektrony s opačnými spiny jsou k sobě přitahovány mechanismem podobným chemické vazbě prvků a chovají se dohromady jako boson, tj. jako částice s celočíselným spinem přenášející interakce (jako například foton přenášející světlo). Této teorii se říká BSC teorie podle fyziků Johna Bardeena, Leona Coopera a Johna Roberta Schrieffera, kteří jsou za tuto teorii spolunositeli Nobelovy ceny za rok 1972. Supravodivost u supravodičů II. druhu, materiálů obsahujících měď nebo nekovové složky, a které také ztrácí supravodivé vlastnosti při stokrát i vícekrát vyšších magnetických polích než supravodiče I. druhu, zatím čeká na vysvětlení.

Později byly objeveny vysokoteplotní supravodiče, materiály, u kterých se supravodivé vlastnosti projevují už u vyšších teplot, v průměru okolo 90 K. Této teploty lze dosáhnout pomocí mnohem levnějšího tekutého dusíku. S kapalným dusíkem se často ukazují pokusy týkající se supravodivosti. Typický vysokoteplotní supravodič je například z materiálu $YBa_2Cu_3O_7$. Pokud jej zchladíme tekutým dusíkem a roztočíme nad ním malý permanentní magnet, bude se nad ním vznášet. Tento efekt využívá Meissnerův-Ochsenfeldův jev: pokud supravodič vložíme do magnetického pole, tak supravodič všechno vnější magnetické pole vytěsní ze svého objemu pryč a odpuzuje jakékoliv další magnety. Supravodiče II. druhu, jako například $YBa_2Cu_3O_7$, tento jev nevykazují úplně – zůstávají v nich kanálky, tzv. vortexy, kde magnetické pole zůstává. Tím může dojít k takovému rozložení magnetického pole, že další vložený magnet se bude vznášet nad supravodičem ve stabilní poloze. Pro větší stabilitu se hodí vložený magnet ještě roztočit.

Pro větší atraktivitu bychom mohli výklad zakončit takovými a podobnými pokusy s vysokoteplotními supravodiči a tekutým dusíkem a zbylý dusík použít na výrobu zmrzliny.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha II.E ... je mi to šumák

8 bodů; průměr 5,31; řešilo 80 studentů

Kupte si v lékárně šumivý celaskon nebo cokoliv, co se podává v tabletách určených k rozpuštění ve vodě. Změřte, jak dlouho trvá rozpuštění jedné tablety v závislosti na teplotě vody, do které ji hodíte. Diskutujte příčiny a vymyslete, proč je pozorovaná závislost taková.

Aleš Podolník umíral na rýmu.

Teorie

Šumivé tablety jsou neobalené tablety s obsahem kyselých látek spolu s uhličitany nebo hydrogenuhličitany, které za přítomnosti vody velice rychle reagují za vzniku oxidu uhličitého, který tvoří bublinky pozorovatelné při jejich rozpouštění. Námi použité tablety obsahují kyselinu citronovou a hydrogenuhličitan sodný, mimo oxidu uhličitého tedy bude vznikat sodná sůl kyseliny citronové a voda.

Kinetika chemických reakcí přímo úměrně závisí na určité rychlostní konstantě k, jejíž závislost na teplotě vyjadřuje Arrheniova rovnice:

$$k = A\mathrm{e}^{-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}},$$

kde A je frekvenční faktor dané reakce zohledňující to, že ne všechny srážky částic jsou účinné a vedou ke vzniku produktů, E_a je aktivační energie (jednotky $\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}}$) dané reakce, tedy minimálně energie, která musí být dodána na to, aby reakce mohla probíhat (zanikaly původní vazby a vznikaly nové), R je molární plynová konstanta a konečně T je to, co nás nejvíce zajímá, tedy teplota v kelvinech. Rychlost je veličina nepřímo úměrná času, čas reakce je tedy nepřímo úměrný rychlostní konstantě k, takže závislost mezi teplotou a rychlostí rozpouštění by mohla být exponenciální.

Celá situace však bude ve skutečnosti složitější, i kvůli tomu, že slisovaná tableta umožňuje průběh reakce pouze na svém povrchu, tedy tam, kde se reaktanty přímo stýkají s vodou, tím se původní vrstva rozrušuje a reakce postupuje do dalších vrstev. Mimo to hydrogenuhličitany a kyselina citronová nejsou jedinými složkami tablety, neboť se jedná pouze o pomocné látky

usnadňující rychlé rozpuštění tablety. Přestože by tablety měly být přiměřeně obsahově stejnoměrné, konkrétní rozmístění všech látek v nich a to, jak bude tableta slisována, bude vždy do určité míry stochastické, což se pak může spolupodílet na tom, zda se daná tableta rozpustí rychleji nebo pomaleji.

Dále je rychlost rozpouštění ovlivněna tím, v jakém okamžiku je vrstva bublinek v bezprostřední blízkosti tablety schopná vyrovnat síly, a vynést tabletu na hladinu, protože po vyplavání tablety se rychlost rozpouštění může snižovat kvůli menšímu styku s vodou.

Experiment

K experimentu byly použity magnesiové šumivé tablety Dr. Max Magnesium s vitaminem B6 s příchutí citronu, které byly rozpouštěny vždy ve zhruba 200 ml vody. Několik tablet po sobě bylo během experimentu zváženo a bylo ověřeno, že jsou hmotnostně stejnoměrné (rozdíl v rámci setin gramu je zanedbatelný a schová se pod jiné, řádově vyšší nejistoty měření).

Teplota vody byla měřena pomocí digitálních teplotních čidel MAXIM DS18B20 v pouzdře TO-92. Čas byl měřen stopkami, jako nejistota měření byly brány 2 s, kvůli problematickému určení okamžiku, kdy je tableta zcela rozpuštěná. Naměřeny byly časy rozpouštění tablet při více než dvaceti různých teplotách v rozmezí od zhruba 1 °C do 93 °C. Tablety mají oproti vodě velmi malý objem, proto se téměř okamžitě dostanou na teplotu vody bez většího ovlivnění výsledků. Opakovat měření pro danou teplotu vícekrát by bylo poměrně náročné, takže více měření bylo provedeno pouze pro vodu s pokojovou teplotou (v rozmezí teplot od 23,1 °C do 24,2 °C), aby bylo možné zhruba odhadnout nejistoty měření.

K měření byla použita vroucí voda z konvice, studená voda z kohoutku, voda pokojové teploty a led vzájemně kombinované v různých poměrech tak, abychom dostali zhruba rovnoměrné rozložení měřených teplot. Led se vždy nechal zcela rozpustit (případné zbytky byly odebrány), aby jeho kusy rozpouštění tablety neovlivňovaly. Do hrnku bylo vloženo teplotní čidlo a vyčkalo se, než se zaznamenávaná teplota dostatečně ustálí. Poté byla do vody vhozena tableta se současným spuštěním stopek a zapsána teplota, s rozpuštěním tablety bylo měření času zastaveno a znovu zapsána teplota.

Jelikož měření trvalo po určitý čas a neprobíhalo za podmínek, které by se snažily o přiblížení tepelně izolované soustavě (což by bylo vhodnější, ale problematicky by se sledoval průběh rozpouštění), byl určitý, byť nevelký, rozdíl mezi teplotou naměřenou na počátku a na konci měření vlivem tepelné výměny s okolím. Poznamenejme tedy, že za teplotu měření považujeme počáteční teplotu a její proměnlivost zahrneme do nejistot určení teploty, které z tohoto důvodu činí ± 2 °C.

Nakonec jsme v experimentování velmi zhruba zabrousili do oblasti termochemie. Tentokrát jsme jako nádobu pro rozpouštění použili termohrnek, jehož otvorem na pití bylo protaženo teplotní čidlo (a lehce přiskřípnuto zavíráním, aby byla soustava dobře tepelně izolovaná). Do termohrnku jsme dali pouze asi 44 g vody pokojové teploty, do které bylo vhozeno 5 šumivých tablet zároveň, ihned jsme důkladně zašroubovali víčko termohrnku a sledovali jsme, jak se mění teplota vody v důsledku probíhající chemické reakce, tedy jaká přibližně bude její termodynamika.

Výsledky a diskuze

V tabulce 1 jsou zaznamenány doby rozpouštění pro pokojovou teplotu. Z nich byla vypočtena výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru (5,88 s), kterou jsme vynásobili $(1-\alpha/2)$-

Tabulka 1: Časy rozpouštění tablet t pro pokojovou teplotu T.

T / °C	t / s
23,6	201
23,7	185
23,5	207
23,6	164
23,7	155
23,6	193
23,1	187
23,8	188
24,2	205

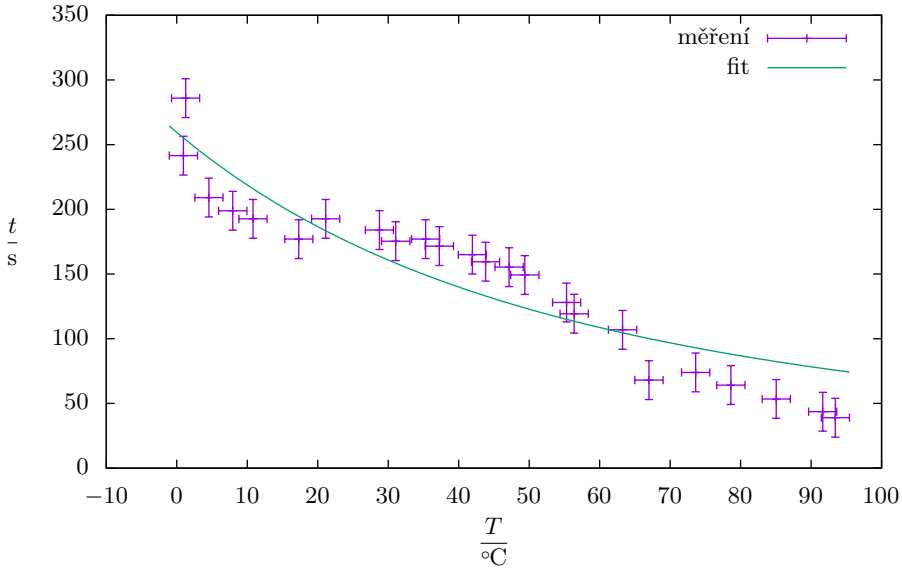
kvantilem Studentova rozdělení pro N stupňů volnosti (N je počet měření), kde $\alpha = 0{,}05$ (tedy pro 95% interval pravděpodobnosti), čímž jsme dostali rozšířenou nejistotu typu A, která činí přibližně 14 s. Vzhledem k tomu, že nejistota měření se stopkami je řádově nižší, můžeme ji zanedbat a prohlásit toto za konečnou nejistotu. Tuto nejistotu chceme stejně využít pouze jako velmi přibližný odhad nejistoty měření pro všechny teploty.

V grafu 2 pak vidíme zaznamenány časy rozpouštění pro různé teploty vody. Jak je vidět, exponenciální fit není vyhovující, závislost rychlosti rozpouštění tablety na teplotě tedy bude poněkud složitější. Vidíme, že zhruba od teploty 20 °C nastává přechod a rychlost rozpouštění se s teplotou zvyšuje pomaleji (zpočátku se dokonce snižuje), toto zpomalení zvyšování rychlosti rozpouštění znovu vymizí přibližně v rozmezí 60 °C–70 °C.

Co tedy může způsobovat, že naměřená závislost je právě taková? Zásadní bude nejspíše to, že se reakcí uvolňují bublinky oxidu uhličitého a že máme reaktanty ve formě slisované tablety, a tak se celý proces neřídí jen kinetikou chemických reakcí, ale závisí i na tom, jak vlastně probíhá rozpouštění a dezintegrace celé tablety. Teď si možná říkáte, jak to může vysvětlovat, co se děje v grafu, protože ve výsledku se stejně rozpouštějí všechny tablety a u všech to proběhne plus mínus obdobně. Problém je právě v tom, že rozpouštění tablet nemá u různých teplot úplně stejný charakter, což jste možná při vašich měřeních také pozorovali (jestli jste měli tablety podobného typu a složení).

Rozpouštíme-li tabletu ve vodě nízké teploty (nízká teplota v našem případě znamená přibližně 0 °C–15 °C), celý proces probíhá relativně pomalu, tím pádem se nám i pomaleji uvolňují bublinky oxidu uhličitého, takže nedochází k jejich dostatečnému hromadění, které je potřebné k tomu, aby byla tableta vynesena na hladinu. Tableta se tedy po významnou část svého rozpouštění drží dole zcela obklopená vodou, což je faktor, který jejímu rozpouštění významně napomáhá. Na hladinu je bublinkami vynesen pouze malý, rozmočený zbytek, který už není problém „dorozpustit“.

Podívejme se na rozpouštění tablet ve vodě střední teploty (přibližně 20 °C–60 °C), zde už se rychlost reakce postupně zvýšila natolik, že za chvíli vzniká dostatečné množství bublinek oxidu uhličitého zároveň, takže k vynesení tablety na hladinu dojde po relativně kratším čase. Nicméně reakce ještě není vyloženě prudká a tableta nestihla nasát významnější podíl vody, a tak se na hladině poměrně dlouho „trápí“, protože rychlost rozpouštění je výrazně snížena tím, že z jedné strany tablety je možnost rozpouštění a reaktivity značně omezena.



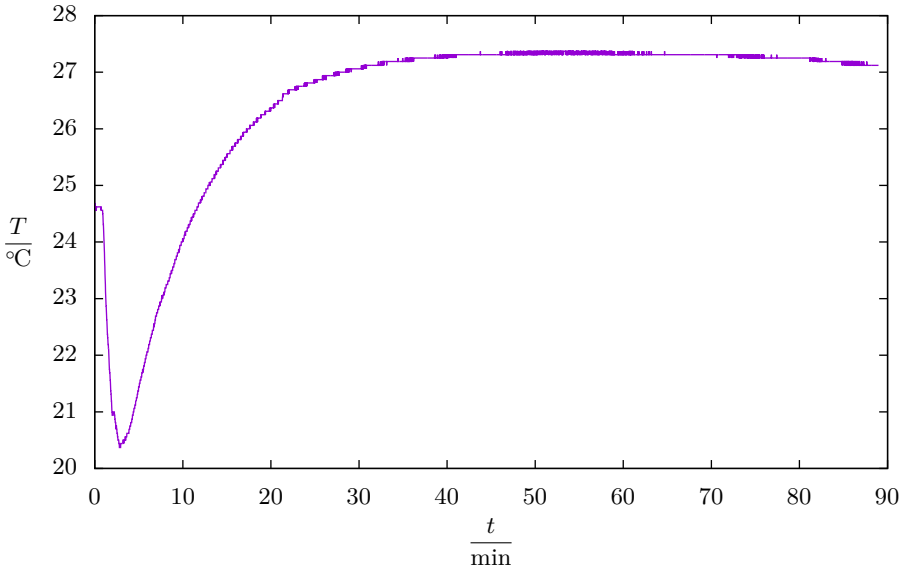
Obr. 2: Naměřené časy rozpouštění tablet pro různé teploty proložené exponenciální funkcí.

Nakonec zbývá věnovat se rozpouštění tablet za vysoké teploty (přibližně 70 °C–90 °C), zde dochází k tomu, že tablety vyplavou velmi rychle (dolní hranice teplotního intervalu) nebo dokonce prakticky okamžitě (horní hranice), ale reakce je natolik bouřlivá, že významně přispívá k rychlé dezintegraci tablety. V podstatě ani na hladině samotnou tabletu skoro nevidíme přes šumící vrstvu pěny, tableta se po hladině velmi rychle pohybuje a naráží do stěn hrnku, což může jejímu rozpadu napomáhat. Nicméně je pravděpodobné, že kdyby se nám podařilo nuceně udržet tabletu pod hladinou, tak abychom zároveň její rozpouštění neovlivňovali (což prakticky dost dobře udělat nejde), tak by se rychlost jejího rozpouštění ještě zvýšila. Nicméně i na hladině už tableta za těchto teplot reaguje dostatečně prudce na to, aby ji efekt vyplavání nezbrzdil tak výrazně, jako tomu je u středních teplot.

Rozdílnost v rozpouštění byla pozorována už při samotném experimentu, ale pro jistotu byl proveden jen velmi zběžně dodatečný experiment, ve kterém byl mimo celkový čas rozpouštění tablety změřen i čas, za který tableta vyplave na hladinu. Jeho výsledkem je to, že ve vodě s teplotou asi 90 °C tableta vyplave skoro hned, ale reaguje opravdu velice prudce. Ve vodě s teplotou asi 31 °C je tableta zcela ponořená pouze po 19 % času svého rozpouštění, zatímco ve vodě o teplotě asi 12 °C zůstane tableta potopená po 77 % času svého rozpouštění, což je významný rozdíl, a je tedy oprávněné předpokládat, že výše popsané je alespoň jedním z důvodů, proč závislost doby rozpouštění tablety na teplotě vody má charakter, který vidíme v grafu, dalším může být také to, jak se chovají pomocné látky v tabletě při různých teplotách.

Další graf 3 ukazuje výsledek zmíněného termochemického měření. Zde je pěkně vidět, že na disoluci tablety a iniciaci následné chemické reakce je nejdříve třeba energii dodávat (teplota vody znatelně klesá z pokojové teploty), posléze se ale uvolňuje ještě větší množství energie, než bylo na začátku potřeba dodat. Jedná se tedy jednoznačně o exotermickou reakci, která

při svém průběhu dodává teplo do systému. Z grafu je patrné, že rozdíl teplot vody ΔT mezi počátečním a konečným stavem je přibližně 3 °C, hmotnost vody je asi $m = 44\,\mathrm{g}$ a její měrná tepelná kapacita asi $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, můžeme tedy určit, že teplo celkově dodané vodě bude $Q = mc\Delta T$, tedy asi 550 J, na jednu tabletu se tedy uvolní přibližně 110 J tepla. Když to dáme do souvislosti s naším hlavním experimentem, vidíme, že rozpouštění jedné tablety ve cca 200 g vody ovlivní její teplotu zanedbatelně (možný nárůst o přibližně 0,1 °C), přestože zahřívaná bude nejdříve lokálně voda v nejbližším okolí tablety.



Obr. 3: Měření teploty v závislosti na čase při rozpouštění pěti tablet současně v malém objemu vody v termohrnku. Počáteční teplota vody je 24,6 °C, minimální teplota vody je 21,1 °C a maximální teplota vody dosahuje 27,6 °C.

Závěr

Byla proměřena závislost času rozpouštění šumivých tablet na teplotě vody. Není překvapivé, že závislost má převážně klesající charakter (tablety se převážně při vyšší teplotě rozpouštějí rychleji). Jak jsme se obávali, jednoduchá exponenciální závislost, která vychází z teorie o kinetice chemických reakcí, na naměřená data nesedí. Zpomalení rozpouštění tablet patrné v jedné části grafu lze vysvětlit jako důsledek různého průběhu rozpouštění tablet (především odlišné relativní doby, za kterou je tableta díky bublinkám oxidu uhličitého vynesena k hladině).

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha II.S ... procesní

6 bodů; průměr 4,65; řešilo 75 studentů

a) *Které ze skupiny 4 procesů (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) mohou být vratné?*

b) *Vezměte vztah* $T = pV/(nR)$ *s* $n = 1\,\mathrm{mol}$, $p = 100\,\mathrm{kPa}$ *a* $V = 22\,\mathrm{l}$. *O kolik se změní* T, *pokud* p *i* V *zvětšíme o* $10\,\%$, $1\,\%$ *a* $0{,}1\,\%$? *Spočítejte to dvěma způsoby: přesně a pomocí vztahu* $\mathrm{d}T = T_{,p}\,\mathrm{d}p + T_{,V}\,\mathrm{d}V$. *Jak se liší tyto výsledky?*

c) d *gymnastika:*

- *Ukažte, že* $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}[f(x)]$, *kde* C *je konstanta.*
- *Vypočítejte* $\mathrm{d}(x^2)$ a $\mathrm{d}(x^3)$.
- *Ukažte, že* $\mathrm{d}(1/x) = -\mathrm{d}x/x^2$ *z definice, tedy*

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\,.$$

  Může se vám hodit $(x+\mathrm{d}x)(x-\mathrm{d}x) = x^2 - (\mathrm{d}x)^2 = x^2$.
- Bonus: *Platí* $\sin(\mathrm{d}\vartheta) = \mathrm{d}\vartheta$ a $\cos(\mathrm{d}\vartheta) = 1$. *Taktéž máme součtový vzorec* $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\beta$. *Dokažte* $\mathrm{d}(\sin\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$.
- Bonus: *Podobně ukažte* $\mathrm{d}(\ln x) = \mathrm{d}x/x$ *s pomocí* $\ln(1+\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$.

d) *Vysvětlete fyzikálně, proč je izobarická tepelná kapacita větší než izochorická.*

Janči má špatný pocit z přílišného množství matematiky.

a) Správna odpoveď na túto otázku nie je stručná, pretože záleží na tom, ako tento proces realizujeme. Dohodnime sa hneď na začiatku, že proces prebieha kvázistaticky; nekvázistatické procesy nie sú vratné.
Mohli by ste si povedať, že pomalý proces s plynom je stále rovnaký, vieme predsa ako sa menia všetky vlastnosti plynu. Dôležité ale je pozrieť sa na to, čo sa deje s okolím, ktoré sa tiež podiela na procese.

Hovoríme väčšinou o procese, pri ktorom plyn zohrievame alebo stláčanie: je to ale iba voľba, všetky tieto úvahy platia aj o opačných procesoch.

Adiabatický proces je najjednoduchší: plyn pomaly stláčame, interaguje len s prístrojom, ktorý ho stláča. Ak začneme piest púšťať, plyn sa bude rozpínať cez rovnaké hodnoty objemu, tlaku a teploty, ako keď sme ho stláčali. Z toho vyplýva, že tiež bude konať rovnakú prácu, akú sme pred tým my konali na neho. Ak teda máme kvalitné alternátory, po spätnom rozpínaní si späť uložíme rovnakú prácu a celý systém sa vráti do pôvodného stavu.

Izotermický proces je taktiež vratný, ale okrem práce je v kontakte s tepelným rezervoárom, ktorému (pri stláčaní) odovzdáva teplo. Rovnaké teplo pretečie späť pri rozpínaní: opäť totiž tlak, teplota aj plyn kopírujú rovnaké hodnoty po ceste tam aj po ceste späť, teda konáme rovnakú prácu, vnútorná energia je konštantná a teda teplo musí byť tiež v oboch prípadoch rovnaké (len ide opačnými smermi).

Ako môže byť niečo nevratné? Najprv si musíme premyslieť, ako by sme realizovali napríklad *izochorický proces*. Keďže prácu nemôžeme konať, môžeme len dodávať alebo odoberať teplo. Na dodávanie tepla máme v podstate dva spôsoby: rozpohybovanie molekúl v plyne (žiarovkou, vrtuľou) alebo priložením plynu ku teplejšiemu telesu. Odoberanie tepla vieme realizovať len kontaktom s chladnejším telesom.

A práve tu sa skrýva nevratnosť: ak chceme zvrátiť to, že sme plynu pridali teplo z nejakého telesa, odoberieme ho do chladnejšieho telesa. Plyn sám o sebe pôjde tam aj späť po rovnakej ceste, ale ostatné telesá už nie. Na konci takéhoto pokusu o opačný proces totiž skončilo nejaké teplo pôvodne z teplejšieho telesa v tom chladnejšom. Odtiaľ ho na teplejšie teleso (bez použitia zase ďalších zariadení) nedostaneme.

To ale nie je koniec: aj výmenu tepla vieme urobiť vratnú. Stačí na to použiť veľa telies za sebou. Nech ich teploty rastú od T_0 do T_1 a z každého (okrem prvého, ktorý má rovnakú teplotu ako plyn) prenesieme teplo ΔQ pri konštantnom objeme plynu. Takto zohrejeme plyn z T_0 na T_1, pričom teplo sme si postupne vypožičali od všetkých týchto telies. Ak chceme ísť späť, musíme začať na predposlednom telese (pretože to najteplejšie teleso už plyn neochladí), a teplo ΔQ postupne prenášať späť do telies. Takto sa nakoniec plyn vráti izochoricky do pôvodného stavu. Takisto sa vrátia do pôvodného stavu všetky rezervoáry, okrem prvého a posledného: z posledného sme preniesli teplo ΔQ do toho prvého (nakreslite si!). Túto nevratnosť ale vieme urobiť ľubovoľne malú: čím viac telies, tým menšie ΔQ.
Ak si teda počíname šikovne, aj izochorický proces vieme urobiť vratne. Nevratný by bol vtedy, ak by sme teplo dodávali len z jedného rezervoáru, alebo napríklad žiarovkou.

Podobne to funguje aj pre *izobarický proces*: tiež pri ňom musíme brať teplo a tým zväčšovať objem. Realizujeme ho napríklad tak, že zohrievame s povoleným piestom, aby sa udržal konštantný tlak. Na rozdiel od predchádzajúceho prípadu si môžeme uložiť nejakú prácu, ktorú koná plyn pri rozpínaní, a použiť ju na stláčanie. Stále ale potrebujeme tepelné rezervoáre na rôznych teplotách; pri použití len dvoch rezervoáro by bol proces nevratný, pri použití rady rezervoárov vratný.

Máme teda ponaučenie: *vratnosť procesu* vyžaduje, aby sme sa pozreli na všetky systémy, ktoré sa procesu účastnia – nie len plyn, ale aj rezervoáre.

Systém, ktorý zo systému berie prácu a dokáže ju späť konať, sa niekedy nazýva rezervoár práce. Môžeme si ho predstaviť ako motor, dynamo a elektrickú batériu, pričom nedokonalá účinnosť je spôsobená len inžinierskymi problémami a v princípe môže byť odstránená. Dôležitý rozdiel voči teplotnému rezervoáru je to, že batéria si môže vratne vymieňať energiu s ľubovoľným systémom. Rezervoár tepla, na druhú stranu, potrebuje systém s rovnakou teplotou, inak bude najprv teplo tiecť samovoľne na chladnejší systém. Táto vlastnosť tepla (ktorá je dôsledkom mechaniky molekúl) ho vyčleňuje ako veličinu, ktorej tok môže byť nevratný.

b) Spočítame si z funkcie

$$T(p,V) = \frac{pV}{nR}$$

najprv koeficienty

$$T_{,p}(p,V) = \frac{V}{nR} \doteq \frac{0{,}022}{1 \cdot 8{,}31}\,\mathrm{K{\cdot}Pa^{-1}} \doteq 2{,}65\,\mathrm{K{\cdot}kPa^{-1}}\,,$$
$$T_{,V}(p,V) = \frac{p}{nR} \doteq \frac{100\,000}{1 \cdot 8{,}31}\,\mathrm{K{\cdot}m^{-3}} \doteq 12\,\mathrm{K{\cdot}l^{-1}}$$

a už len dosadíme. Výsledky sú zapísané v tabuľke 2. Pri niektorých hodnotách v tabuľke sme použili priveľa cifier (zadané veličiny by diktovali použiť tak 2 cifry). Je to preto, lebo

Tabulka 2: Výpočet zmien teploty

%	Δp	ΔV	$T_{,p}\Delta p + T_{,V}\Delta V$	$T(p+\Delta p, V+\Delta V) - T(p,V)$
10 %	10 kPa	2,2 l	53 K	56 K
1 %	1 kPa	0,22 l	5,29 K	5,32 K
0,1 %	100 Pa	0,022 l	529,2 mK	529,5 mK

porovnávame matematický efekt zanedbania, nie skutočné fyzikálne výsledky. S presnosťou na dve platné cifry by sme pri zmene o 1 % a menej ani nevideli rozdiel.

c) d gymnastika:

- Dôkaz $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}[f(x)]$ je jednoduchý: pri zmene x o $\mathrm{d}x$ sa $f(x)$ zmení o

$$\mathrm{d}[f(x)] = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)\,.$$

  Vynásobením tejto rovnice C dostaneme to, čo hľadáme

$$C\mathrm{d}[f(x)] = Cf(x+\mathrm{d}x) - Cf(x)\,.$$

  Ľavá strana je zmena $f(x)$ krát C, pravú môžeme chápať aj ako zmenu $Cf(x)$.

- Rozvinieme

$$(x+\mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

  Pripomeňme si, že $\mathrm{d}(x^2)$ je zmena x^2 pri zmene o $\mathrm{d}x$, teda druhý člen v rozvoji, ktorý sme práve spočítali

$$\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x\,.$$

  Pre $\mathrm{d}(x^3)$ by sme mohli postupovať rovnako, ale už vôbec nebudeme písať členy s vyššou akou prvou mocninou $\mathrm{d}x$. Také sú len dva

$$(x+\mathrm{d}x)^3 = x^3 + 3x^2\,\mathrm{d}x\,,$$

  ako sa ľahko presvedčíte z roznásobovania $(x+\mathrm{d}x)(x+\mathrm{d}x)(x+\mathrm{d}x)$. Dostávame

$$\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\mathrm{d}x\,.$$

- Najprv použijeme trik zo zadania

$$\frac{1}{x+\mathrm{d}x} = \frac{x-\mathrm{d}x}{x^2-(\mathrm{d}x)^2} = \frac{x-\mathrm{d}x}{x^2}$$

  a už len odčítame $1/x$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\mathrm{d}x} - \frac{1}{x} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,.$$

- Rozpíšeme

$$\sin(\vartheta+\mathrm{d}\vartheta) = \sin\vartheta\cos\,\mathrm{d}\vartheta + \sin\mathrm{d}\vartheta\cos\vartheta = \sin\vartheta + \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$$

  a rovno vidíme

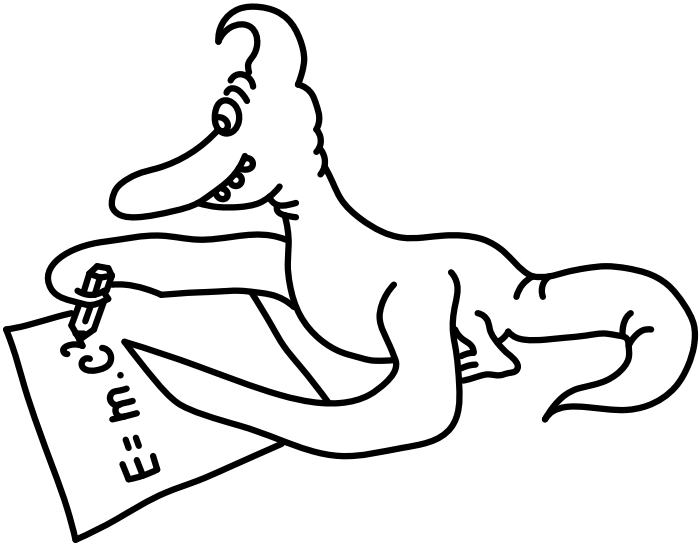
$$\mathrm{d}(\sin\vartheta) = \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

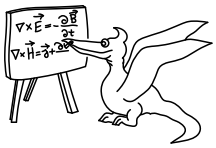
- Tu použijeme sčítavaciu vlastnosť logaritmu $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ na

$$\ln(x + \mathrm{d}x) = \ln\left[x\left(1 + \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \ln x + \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

d) Ak porovnáme proces pri konštantnom tlaku a objeme, tak pri rovnakom zvýšení teploty narastú v oboch prípadoch rovnako aj vnútorné energie. Pri konštantnom tlaku sa ale trochu zväčší objem plynu, pri čom plyn vykoná prácu. Zo zákona zachovania energie vieme, že teplo dodané pri izobarickom deji teda musí obsahovať navyše aj energiu použitú na konanie práce, a teda izobarická tepelná kapacita je väčšia.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz





Seriál: Entropia

Aj počas tohoto dielu seriálu uvažujeme konštantný počet častíc pri všetkých procesoch. Výnimku urobíme až úplne na konci, na čo vás samozrejme upozorníme.

V úlohe z minulého dielu ste mali rozdeliť procesy na vratné a nevratné. Videli ste, že pri skúmaní vratnosti sme sa museli pozrieť na celý systém zúčastňujúci sa procesu.

Nevratné procesy boli tie, pri ktorých tieklo teplo z teplejšieho telesa na chladnejšie. Môže to nastať napríklad pri izochorickom a izobarickom procese. Pri izotermickom (s tepelným rezervoárom) tečie teplo medzi telesami rovnakých teplôt a pri adiabatickom teplo netečie.

To, že tok tepla z teplejšieho na chladnejšie teleso je nevratný, je intuitívne, ale veľmi dôležité tvrdenie. Preto sa volá *druhý termodynamický zákon*.

Neexistuje spôsob, ako prinútiť teplo tiecť z chladnejšieho telesa na teplejšie bez ovplyvňovania okolia.

S ovplyvňovaním okolia je to, samozrejme, jednoduché. Robí to napríklad každá chladnička.

Vidíme, že nastala menšia zrážka terminológie. Slovo vratný proces sa dá chápať dvoma spôsobmi:

- vratný je vývoj jedného systému, pričom nespomíname okolie.
- proces so všetkými systémami, ktoré sa ho zúčastňujú, je vratný.

Pod pojmom vratný proces budeme myslieť tú druhú možnosť (pretože každý proces s plynom je vratný v prvom zmysle, stačí vziať robotickú ruku pre každú molekulu plynu). Pri zmätení je ale dobré spomenúť si, že to sú dva rôzne koncepty.

Perpetuum mobile

Termodynamické zákony sa často spomínajú v súvislosti s perpetuum mobile: prístrojom, ktorý by nám poskytoval energiu zadarmo.

Prvý termodynamický zákon zakazuje perpetuum mobile prvého druhu: také, ktoré by z ničoho vyrábalo energiu. Druhý termodynamický zákon zakazuje perpetuum mobile druhého druhu: to by dokonale premieňalo teplo na energiu. Treba si totiž uvedomiť, že napríklad svetové oceány skrývajú obrovské množstvo energie v neusporiadanom pohybe svojich molekúl: ak by sme túto energiu vedeli využiť, mali by sme po energetických starostiach.

Teplo vieme čerpať a čiastočne premieňať na energiu: priložením chladnejšieho telesa a využitím prúdu, ktorý medzi nimi vznikne (existuje ale aj lepší spôsob, tzv. *Carnotov cyklus*). Na to ale potrebujeme chladnejšie teleso a tie sa míňajú používaním.

Druhý termodynamický zákon teda hovorí, že nedokážeme tieto chladnejšie telesá opäť ochladzovať zadarmo – ak by sme to vedeli, tak by sme stále využívali prúd tepla do telesa (napr. z oceánu) a mali by sme perpetuum mobile druhého druhu. Preto sa druhý termodynamický zákon hovorí aj v tomto tvare

Perpetuum mobile druhého druhu neexistuje.

Hovorí sa, že ide o *ekvivalentnú* formuláciu.

Meranie nevratnosti

Vedeli by sme povedať, ako veľmi je nejaký proces nevratný? Zistili sme, že nevratnosť súvisí s pridaním tepla, nejaká zmena „miera nevratnosti“ teda by mala byť úmerná δQ. Nejako ale treba zobrať do úvahy aj teplotu. Vieme, že ochladzovať veľmi chladné objekty je ťažké, ochladzovať veľmi teplé objekty je ľahké: preto skúsime jednoducho teplotou vydeliť. Toto sa ukáže z viacerých dôvodov ako veľmi dobrý nápad, zatiaľ to ale vezmime ako nástrel.

Táto miera nevratnosti sa nazýva *entropia*, značí sa S a je to skutočne číslo závisiace na stave systému. Pre ideálny plyn by to teda bola funkcia napríklad teploty a objemu $S(T, V)$. Ak plyn s teplotou T pri nejakom *kvázistatickom* procese prijme teplo δQ, povieme, že sa entropia zmenila o

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}\,.$$

Tu sme urobili jeden veľmi silný predpoklad a to, že existuje funkcia S stavu systému, ktorá sa pri malých zmenách systému mení ako $\delta Q/T$. Ak si totiž predstavíme dlhší proces spájajúci dva stavy systému (T_A, V_A) a (T_B, V_B), zmenu entropie $\Delta S = S(T_B, V_B) - S(T_A, V_A)$ by sme mali nasčítať po malých kúskoch procesu.

Ak by sme mali takéto procesy dva, tak vôbec nemusí byť jasné, že po súčte po dvoch rôznych cestách by sme dostali rovnaké ΔS! Ešte sa ku tomuto predpokladu vrátime.

Ďalšia dôležitá vlastnosť entropie je sčítavacia: ak máme viacero systémov, tak entropia celku sa definuje ako súčet entropií jednotlivých častí. Vyzbrojený týmito vlastnosťami sa môžeme presvedčiť, že entropia skutočne meria nevratnosť (aspoň pre procesy s ideálnym plynom).

- Pri adiabatickom deji je $\delta Q = 0$, a teda aj $\mathrm{d}S = 0$. Preto sa nazýva aj *izoentropický*.
- Pri izotermickom deji sa síce entropia plynu mení, ale nesmieme zabudnúť na entropiu rezervoáru. Ak plyn prijme teplo δQ, tak rezervoár odovzdá δQ, resp. prijme $\delta Q_{\mathrm{rez}} = -\delta Q$. Celková zmena entropie je

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{celk}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{plyn}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{rez}} = \delta Q/T + \delta Q_{\mathrm{rez}}/T = \delta Q/T - \delta Q/T = 0\,.$$

- Predchádzajúci výpočet stál na tom, že teplota plynu a rezervoáru je rovnaká. Vieme ale, že pri izochorickom a izobarickom deji musí byť plyn v kontakte s rezervoárom inej teploty, inak by sa nič nedialo. Ak plyn teplo prijíma, tak je rezervoár teplejší, a teda $\delta Q > 0$, $T_{\mathrm{rez}} > T_{\mathrm{plyn}}$ a zmena entropie

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{celk}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{plyn}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{rez}} = \delta Q/T_{\mathrm{plyn}} - \delta Q/T_{\mathrm{rez}} = (T_{\mathrm{rez}} - T_{\mathrm{plyn}})\frac{\delta Q}{T_{\mathrm{plyn}} T_{\mathrm{rez}}} > 0\,.$$

Entropia teda rastie práve pri nevratných procesoch. Preto sa môže druhý termodynamický zákon formulovať aj pomocou rastu entropie. Použijeme *izolovaný systém*, teda taký, ktorý už neinteraguje s ďalšími systémami. Myslíme tým, že sa pozeráme na všetky časti, ktoré sa procesu zúčastňujú.

Entropia izolovaného systému rastie.

Kvôli tomuto je entropia populárna aj medzi verejnosťou, zákon sa ľahko pamätá a vyjadruje istú nevyhnutnosť. My však vieme, že je to len iný spôsob ako povedať „teplo tečie z teplejšieho telesa na chladnejšie, ale nie naopak“.

Dôležitá poznámka je o pomalosti týchto procesov: stále sme predpokladali, že sú kvázistatické. Pozrime sa napríklad na Joulov pokus z minulého dielu: rýchle vypustenie plynu na dvojnásobný objem. Ide o izolovaný proces (netečie teplo) a plyn nekoná prácu (proti vákuu), takže sa nezmení ani vnútorná energia. Z toho vyplýva, že sa nezmení ani teplota. Dostali sme teda plyn s rovnakou teplotou, dvojnásobným objemom a teda polovičným tlakom.

Čo sa stalo s jeho entropiou? Ak by sme ho teraz adiabaticky stlačili na pôvodný objem, jeho entropia sa nezmení a dostali by sme plyn s rovnakým objemom ako na začiatku, ale s vyššou teplotou. Plyn s vyššou teplotou a rovnakým objemom má ale vyššiu entropiu: pretože takýto stav vieme dosiahnuť i kvázistatickým pridávaním tepla, pri ktorom je $\mathrm{d}S > 0$.

Takto sme teda vypustením plynu s $\delta Q = 0$ dostali stav s vyššou entropiou ako na začiatku.

Vsuvka: *Premenné v termodynamike*

Pre ideálny plyn je stav určený dvoma veličinami, napríklad teplotou a tlakom. Pomocou stavovej a kalorickej rovnice vieme dopočítať objem a vnútornú energiu. Podobne ale môžeme stav udať aj dvojicou hodnôt teplota, tlak alebo tlak, objem alebo napríklad tlak a vnútorná energia.

Ideálny plyn je špeciálny v tom, že vnútorná energia závisí len od teploty: tým myslíme, že pre rovnaké teploty a rôzne objemy (alebo tlaky) je energia rovnaká. Preto máme jednu výnimku, a to dvojicu teplotu a vnútornú energiu: so zadanou teplotou už poznáme vnútornú energiu, ale nevieme ešte dopočítať tlak a objem.

Všeobecne teda potrebujeme dva parametre (celý čas berieme počet častíc za konštantný) na určenie stavu, ale môžeme si vybrať rôzne dvojice. Ostatné veličiny, ktoré závisia od stavu, potom vyjadríme pomocou tejto dvojice premenných. Preto máme napríklad vyjadrenie $U(p,V) = (s/2)pV$ a $U(T,V) = (s/2)nRT$.[6] Všimnite si, že z matematického pohľadu sú to iné funkcie: berú iné veličiny a ak by sme do nich predsa len dosadili rovnaké čísla, výsledky by boli iné (napríklad $U(p,V)$ je nula pre nulový objem, ale $U(T,V)$ nie je.). To, že ich značíme rovnakým písmenom U, je veľmi výstižné (lebo merajú tú istú veličinu), ale môže to spôsobiť zmätok, najčastejšie pri počítaní zmien funkcie.

U entropie si tiež môžeme zvoliť veličiny, podľa ktorých vyjadríme, čo sa nám bude hodiť. Za úlohu potom budeme mať pocvičiť sa vo vyjadrovaní entropie do ďalších párov.

Ponaučenie z tejto diskusie teda je: je rozdiel medzi fyzikálnou veličinou, závisiacou na stave telesa, a funkciou, ktorá počíta jej hodnotu na základe iných parametrov, určujúcich stav. Obe sa značia rovnakým písmenom a označujú rovnakú vec, ale niekedy je dôležité ich v mysli rozlíšiť.

Pozor, náročná poznámka! Pokojne ju preskočte. Ak máme nejakú fyzikálnu veličinu f, závisiacu od stavu, tak jej zmenu pri malom procese udáme napríklad

$$\mathrm{d}f = f_{,T}\mathrm{d}T + f_{,p}\mathrm{d}p\,,$$

čo nám dáva, pri známych funkciách $f_{,T}$ a $f_{,p}$, návod ako počítať zmeny f. Mohli by sme do tohoto návodu pridať aj napríklad zmenu objemu? Určite,

$$\mathrm{d}g = \alpha\mathrm{d}T + \beta\mathrm{d}p + \gamma\mathrm{d}V\,,$$

[6] Tu vkladáme aj objem, aby sme boli konzistentní s tými dvoma parametrami. Použiť by sme mohli aj tlak.

kde sme ale označili nové funkcie inak. Ak totiž poznáme zmenu $\mathrm{d}T$ a $\mathrm{d}p$, môžeme určiť aj zmenu všetkých ostaných funkcií stavu, teda aj objemu V. Preto posledná formula obsahuje viac informácií, ako potrebujeme. Presnejšie, už dávnejšie sme spočítali

$$p\mathrm{d}V \ + V\mathrm{d}p = nR\mathrm{d}T\,,$$

Dosadením by sme vedeli eliminovať $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}p$ alebo $\mathrm{d}T$, ktoré si vyberieme. Napríklad, dosadením za $\mathrm{d}T$ by sme dostali

$$\mathrm{d}g = \frac{\alpha}{nR}(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p) + \beta\mathrm{d}p + \gamma\mathrm{d}V = \left(\frac{\alpha V}{nR} + \beta\right)\mathrm{d}p + \left(\frac{\alpha p}{nR} + \gamma\right)\mathrm{d}V\,,$$

Tu vidíme dôvod, prečo sme β neoznačili $g_{,p}$: nie sú to rovnaké funkcie.

Ďalší problém, ktorý vidíme, je, že $g_{,p}$ dáva zmysel, len ak vieme, na akých premenných g závisí. Ak totiž

$$\mathrm{d}g = \mu_1\mathrm{d}T + \nu\mathrm{d}p = \mu_2\mathrm{d}T + \varrho\mathrm{d}V\,,$$

funkcie μ_1 a μ_2 sú určite rôzne, hoci by sme ich označili $g_{,T}$. Rozdiel je v tom, že v prvom prípade robíme s $g(T,p)$ a v druhom s $g(T,V)$. Existuje aj iné značenie, ktoré by μ_1 zapísalo ako $(g_{,T})_p$ a μ_2 ako $(g_{,T})_V$. Takéto funkcie sa volajú postupne zmena g s teplotou pri konštantnom tlaku a pri konštantnom objeme: premyslite si prečo.

Entropia ideálneho plynu

Pre ideálny plyn sa dá entropia $S(T,V)$ ľahko vyjadriť. Použijeme ku tomu myslený kvázistatický proces a pozrieme sa, o koľko sa entropia zmení. Z prvého termodynamického zákona vieme vyjadriť δQ

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V\,.$$

Použijeme $\delta Q = T\mathrm{d}S$ a dostaneme pre zmenu entropie

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V\,.$$

Zmenu vnútornej energie vyjadríme podľa zmeny teploty, za plyn dosadíme zo stavovej rovnice

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{s}{2}nR\frac{\mathrm{d}T}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V}\,.$$

Použijeme $\mathrm{d}\ln x = \mathrm{d}x/x$, násobenie konštantou a sčítavanie, aby sme pravú stranu vyjadrili ako d od niečoho

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}(\frac{s}{2}nR\ln T + nR\ln V)\,.$$

Ak to ešte prehodíme na jednu stranu, dostaneme

$$\mathrm{d}(S - \frac{s}{2}nR\ln T - nR\ln V) = 0\,.$$

Táto rovnica hovorí, že pri kvázistatickom procese sa nemení veličina

$$S - \frac{s}{2}nR\ln T - nR\ln V\,,$$

tá teda musí byť rovná konštante

$$S = \frac{s}{2}nR\ln T + nR\ln V + S_0\,.$$

Počas celého procesu sme brali počet častíc ako konštantný parameter, preto aj konštanta S_0 na ňom môže závisieť.

Teraz idem robiť úvahu s premenným počtom častíc

Závislosť na počte častíc si odvodíme fyzikálnou úvahou. Prepíšme si najprv takto prefíkane konštantu $S_0(n)$

$$S_0(n) = nR(s_0 - \ln(f(n)))\,,$$

kde $f(n)$ je nejaká nová, neznáma funkcia. Pridali sme aj konštantu s_0, lebo môžeme. S takýmto vyjadrením sa nám entropia zjednoduší na

$$S(T, V; n) = nR \ln\left(\frac{T^{\frac{s}{2}} V}{f(n)}\right) + nRs_0\,.$$

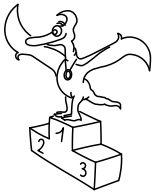
Pozrime sa teraz na nádobu v tvare kvádra s objemom $2V$, naplnenú $2n$ molami ideálneho plynu. Ak ju napoly rozdelíme stenou, dostaneme dva oddelené plyny s objemom V a rovnakými teplotami. Toto prehradenie vieme vrátiť a opakovať ako chceme, určite teda nemení celkovú entropiu. Pred prehradením má celá sústava entropiu $S(T, 2V; 2n)$. Po prehradení máme 2 plyny, každý s entropiou $S(T, V; n)$. Celková entropia je súčet a keďže rozdelenie nemení entropiu, musí platiť

$$S(T, 2V; 2n) = 2S(T, V; n)\,.$$

Pri pohľade na vzorec na entropiu vidíme, že dvojku dostaneme z faktoru nR pred logaritmom. V logaritme už teda pri zmene $2V, 2n \to V, n$ nesmie nič zmeniť, teda $V/f(n)$ musí byť len ich podiel V/n (hocijakú konštantu, ako napríklad $V/(2n)$, dáme do s_0 vďaka tomu, že je v logaritme). Dostávame teda

$$S(T, V; n) = nR \ln\left(\frac{T^{\frac{s}{2}} V}{n}\right) + nRs_0\,.$$

Nabudúce sa pozrieme na Carnotov cyklus. Entropia nám totiž umožní jednoducho rozprávať o účinnosti rôznych strojov a najúčinnejší z nich bude práve Carnotov cyklus.



Pořadí řešitelů po II. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**II**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	3	5	5	5	8	6	**40**	*100*	**78**
1.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	2	6	–	5	3	5	7	6	**34**	*83*	**62**
2.	*Ladislav Trnka*	G, Havlíčkův Brod	2	4	0	5	4	3	8	6	**32**	*73*	**57**
3.–4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	2	2	2	5	3	1	6	5	**26**	*70*	**52**
3.–4.	*Josef Minařík*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	0	5	–	2	5	4	**24**	*71*	**52**
5.	*Vojtěch Laitl*	G, Ostrov	2	0	0	2	2	3	8	4	**21**	*62*	**48**
6.	*Martin Vavřík*	G, Šumperk	–	2	0	5	–	2	6	4	**19**	*62*	**43**
7.	*Jindřich Dušek*	G Jana Keplera, Praha	2	4	1	2	–	4	5	3	**21**	*61*	**42**
8.	*Jiří Blaha*	G, Uherské Hradiště	2	2	–	5	–	–	5	6	**20**	*65*	**37**
9.	*Jakub Smolka*	Slezské G, Opava	2	6	0	5	–	1	4	–	**18**	*57*	**33**
10.	*Tereza Pavlišová*	G, Olomouc-Hejčín	2	4	0	1	–	–	5	2	**14**	*47*	**28**
11.	*Jakub Růžička*	G, Nymburk	–	2	0	5	–	2	5	–	**14**	*58*	**26**
12.–13.	*Ivan Hudák*	ESŠ, Lip. Mikuláš	0	4	0	5	–	3	2	–	**14**	*35*	**22**
12.–13.	*Anna Jandová*	G Legionářů, Příbram	–	4	0	1	–	2	3	–	**10**	*40*	**22**
14.–16.	*Ondřej Bursa*	G, Brno-Řečkovice	2	6	0	2	–	–	–	–	**10**	*68*	**21**
14.–16.	*David Otta*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	0	5	–	–	–	–	**9**	*66*	**21**
14.–16.	*Dominik Stejskal*	G, Krnov	–	–	0	5	1	1	–	–	**7**	*49*	**21**

Kategorie druhých ročníků

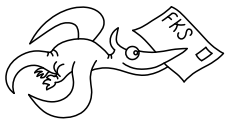
	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**II**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	3	5	5	5	8	6	**40**	*100*	**78**
1.	*Vít Beran*	Masarykovo G, Plzeň	6	6	3	5	4	5	8	7	**44**	*97*	**76**
2.	*Ondřej Knopp*	G, Třeboň	4	2	2	5	5	5	7	7	**37**	*86*	**67**
3.	*David Němec*	G, Tanvald	2	2	1	5	3	3	7	6	**29**	*82*	**61**
4.	*Alexandr Jankov*	Matiční G, Ostrava	2	4	–	5	4	4	8	6	**33**	*83*	**59**
5.–6.	*Šimon Karch*	G Komenského, Havířov	2	4	3	5	5	–	5	5	**29**	*85*	**58**
5.–6.	*Viktor Rosman*	G, Pelhřimov	2	4	3	6	4	2	5	5	**31**	*74*	**58**
7.	*Jan Lindauer*	První české G, Karlovy Vary	0	2	0	5	4	3	4	5	**23**	*60*	**47**
8.	*Jan Šenk*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	6	2	5	4	3	–	6	**28**	*79*	**46**
9.–10.	*Tomáš Dulava*	Matiční G, Ostrava	2	2	1	5	4	4	6	5	**29**	*79*	**44**
9.–10.	*Ladislav Nagy*	G a SOŠZZE Vyškov	0	2	1	2	4	3	5	4	**21**	*56*	**44**
11.–12.	*Zuzana Richterová*	G, Pelhřimov	2	2	3	4	3	2	4	4	**24**	*55*	**43**
11.–12.	*Dominik Starý*	G, Benešov	2	6	–	–	–	2	–	6	**16**	*81*	**43**
13.	*Martin Crhán*	G, Studentská, Havířov	2	2	1	5	4	2	3	5	**24**	*54*	**42**
14.	*Matúš Kopunec*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	2	–	6	–	–	5	7	**20**	*79*	**41**
15.	*Václav Kubíček*	Arcibisk. G, Kroměříž	2	2	1	6	2	3	–	7	**23**	*70*	**37**
16.	*Mikuláš Mikula*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	4	–	–	–	3	4	–	**13**	*67*	**34**
17.	*Denisa Chytilová*	G J. Škody, Přerov	2	2	–	–	–	3	–	6	**13**	*67*	**26**
18.	*Tomáš Faikl*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	5	–	–	–	6	**11**	*86*	**25**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**II**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	3	5	5	5	8	6	**36**	*100*	**70**
1.	*Jáchym Bártík*	G, Havlíčkův Brod	1	3	3	6	4	5	8	7	**37**	*99*	**69**
2.	*Matěj Mezera*	G, Havlíčkův Brod	3	3	3	6	4	5	6	7	**37**	*96*	**67**
3.	*Daniela Pittnerová*	G L. Svobodu, Humenné	3	2	1	5	4	5	8	5	**33**	*87*	**61**
4.	*Štěpán Stenchlák*	G, Třinec	1	3	4	6	4	4	7	6	**35**	*83*	**58**
5.	*Pavol Šimko*	G V. Nedožerského, SR	1	1	1	6	5	4	5	7	**30**	*81*	**57**
6.	*Přemysl Šťastný*	G, Žamberk	1	1	1	5	4	0	8	7	**27**	*77*	**54**
7.	*Jozef Lipták*	G Tajovského, B. Bystrica	1	1	3	4	3	1	5	7	**25**	*77*	**51**
8.	*David Vokrouhlický*	G Jana Keplera, Praha	1	1	1	6	4	1	6	4	**24**	*67*	**47**
9.–10.	*Vít Horáček*	G L. Jaroše, Holešov	1	1	0	5	4	1	5	4	**21**	*66*	**46**
9.–10.	*Petr Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	1	2	5	–	3	8	4	**25**	*71*	**46**
11.–12.	*Andrej Kancko*	G B. S. Timravy, Lučenec	1	2	1	–	–	4	8	3	**19**	*79*	**44**
11.–12.	*Kateřina Stodolová*	G Dašická, Pardubice	1	2	1	3	–	4	8	6	**25**	*85*	**44**
13.	*Veronika Rajňáková*	G, Nové Zámky	2	1	–	5	–	2	5	6	**21**	*78*	**42**
14.	*Jakub Kožušník*	Wichterlovo G, Ostrava	1	2	0	1	4	2	6	3	**19**	*57*	**40**
15.–16.	*Martin Štyks*	G Jana Keplera, Praha	2	1	0	–	4	–	4	5	**16**	*68*	**38**
15.–16.	*Matěj Vitouch*	G, Křenová, Brno	–	2	–	5	–	4	6	5	**22**	*81*	**38**
17.–19.	*Igor Bajo*	G, Hodonín	1	1	0	2	2	3	5	2	**16**	*51*	**36**
17.–19.	*Marek Raja*	G, Nymburk	1	2	0	2	1	0	6	2	**14**	*51*	**36**
17.–19.	*Klára Ševčíková*	G, Uherské Hradiště	1	2	1	2	4	–	4	–	**14**	*65*	**36**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**II**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	3	5	5	5	8	6	**36**	*100*	**70**
1.	*Lukáš Supik*	G, Třinec	1	2	3	6	4	4	8	7	**35**	*93*	**65**
2.	*Petr Hrubý*	G, Polička	1	3	1	6	4	4	8	6	**33**	*91*	**64**
3.	*Tomáš Hrbek*	G J. Ressela, Chrudim	1	1	0	5	4	5	7	7	**30**	*80*	**56**
4.	*Peter Kubaščík*	G Kysucké Nové Mesto	1	1	1	5	4	4	8	6	**30**	*76*	**53**
5.	*Šimon Knoška*	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	1	2	2	6	–	3	7	5	**26**	*80*	**49**
6.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové, HK	1	1	–	4	4	–	7	5	**22**	*79*	**46**
7.	*Andrej Uhliarik*	G A. Bernoláka, Námestovo	1	2	1	5	2	2	7	6	**26**	*66*	**43**
8.	*Andrea Tóthova*	G Jura Hronca, Bratislava	2	2	–	5	4	2	–	–	**15**	*66*	**35**



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.