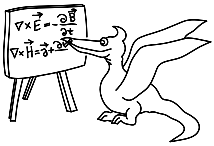


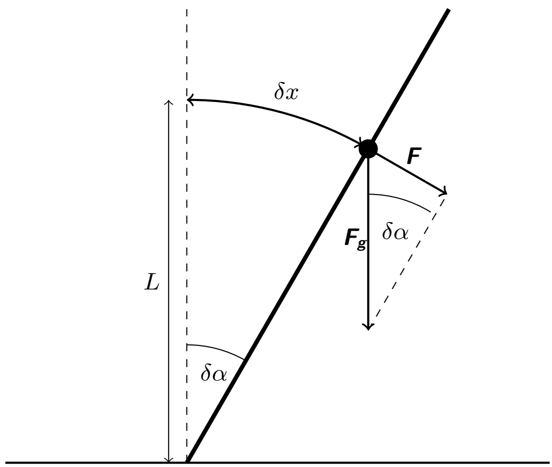
Seriál: Definujeme chaos!

V prvních dvou dílech tohoto seriálu jsme se naučili namontovat křidýlka na slepici ve vakuu. Tedy, na příkladu rotujícího fotbalového míče jsme se naučili jak zformulovat jednoduchý model a pak také spočítat jeho důsledky pomocí numerických simulací. Ve třetím dílu jsme pak probrázdili krajinu dynamických systémů a ukázali si pár ochutnávek toho, co lze čekat od chování různých vázaných pohybů.

Vázaný pohyb může být statický (tedy vlastně „nepohyb“), kvaziperiodický (kde periodický je speciální případ takového pohybu) a aperiodický. Aperiodický pohyb je navíc v drtivé většině případů chaotický. Ale co že to znamená ten chaotický pohyb? To si právě teď řekneme, počkejte minutku.

Ztráta desetinných čísel s propiskou

Teď potřebuji, abyste si vzpomněli na úplně první seriálovou úlohu, kterou jste v tomto ročníku řešili. Měli jste v ní za úkol uvažovat nad tím, jak to, že žijeme v deterministickém světě, kde je i přesto tolik nejistoty. Chaos a s ním spojená ztráta informace s tím má mnoho dočinění. My si ale teď ukážeme, jak se informace ztrácí v příkladu z úlohy – u propisky postavené na špičku.



Obr. 1: Nákres sil působících na propisku vychýlenou o úhel $\delta\alpha$ z nestabilní rovnovážné polohy.

U propisky budeme uvažovat pouze dva její možné pohyby – doleva a doprava. Výchylku polohy těžiště budeme značit $\delta\alpha$ a vzdálenost těžiště od špičky L. Celá situace je načrtnutá na obrázku 1. Kdybychom uvažovali, že se propiska může pohnout i dopředu a dozadu, došli bychom k těm stejným závěrům, k jakým za chvíli dojdeme, jen bychom se museli starat o více rozměrů.

Když je těžiště propisky odchýlené o nějaký malý oblouk δx od polohy nad špičkou, část tíhové síly se vyruší tlakem špičky o povrch, ale část se promítne do směru pádu. Síla působící ve směru pádu je tedy $F = mg\sin(\delta\alpha)$. Délka oblouku od rovnovážné polohy těžiště je $\delta x = L\delta\alpha$[1] a Newtonův druhý zákon je při promítnutí do oblouku $F = m\delta\ddot{x}$. Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$m\delta\ddot{x} = mg\sin\left(\frac{\delta x}{L}\right) . \tag{1}$$

Protože ale mluvíme o hodně malých vychýleních platí přibližně $\sin\delta\alpha \approx \delta\alpha = \delta x/L$. Když to pak dosadíme do rovnice (1) a podělíme jí m, dostáváme

$$\delta\ddot{x} = \frac{g}{L}\delta x .$$

Máme tu tedy rovnici, co říká „druhá derivace funkce = něco krát funkce". Funkcí, které vypadají v podstatně stejně i po dvou derivacích, není mnoho – v reálném oboru je to pouze sinus, kosinus a exponenciela.[2] Sinus a kosinus ale po dvojím derivování před sebe vyhodí znaménko mínus, což v tomto případě nemáme, a proto řešením může být pouze exponenciela. Můžete si sami ověřit, že řešení naší rovnice je

$$\delta x = C_1\exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) ,$$

kde C_1, C_2 jsou dvě konstanty odpovídající různým počátečním podmínkám. Pokud například nastavíme $C_1 = \delta x_0$ a $C_2 = 0$, pak derivováním dostaneme pro rychlost v čase $t = 0$

$$\delta v_0 \equiv \delta\dot{x}(t=0) = \delta x_0\sqrt{\frac{g}{L}}\exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\Big|_{t=0} = \delta x_0\sqrt{\frac{g}{L}} .$$

Naopak pokud C_1 úplně vynulujeme a nastavíme $C_2 = \delta x_0$, pak dostaneme $\delta v_0 = -\delta x_0\sqrt{g/L}$.

Hlavní ale je, že pokud je malá výchylka v kladných δx (tj. doprava) a rychlost těžiště také doprava, výchylka roste exponenciálně (což je děsně rychle). To vše ale platí jen do okamžiku, kdy začnou být δx a α příliš velké na to, aby platilo $\sin\alpha \approx \alpha$.

Na obrázku 2 vidíte náčrt různých vývojů propisky v prostoru rychlostí a poloh. Na obrázku 3 vidíte vývoj kruhu počátečních podmínek okolo $\delta x = 0$ a $\delta v = 0$. Když totiž roztřesenou rukou umístíme propisku na stůl špičkou dolů, nejsme si jisti, jestli jsme těžiště umístili přímo nad špičku. Nejsme si také jisti, jestli jsme na poslední chvíli do propisky trochu nedrkli a neudělili jí tím malou rychlost – ať na jednu nebo na druhou stranu. Jsme si tedy jisti jen tím, že jsme propisce dali počáteční podmínky jen někde v podobném kruhu neurčitosti.

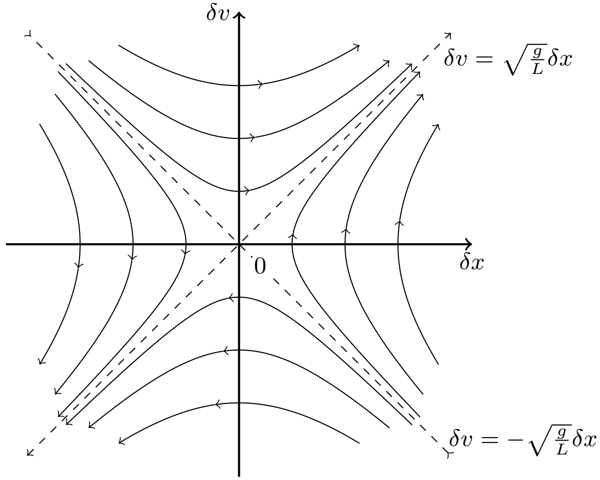
Jak ale vidíte na obrázku 3, tvar kruhu se rychle mění. Po chvíli jsme si vlastně velmi jisti tím, že těžiště propisky již není nad špičkou, ani blízko takovému bodu, protože se kruh neurčitosti vývojem úplně rozmázl do pádu buď nalevo nebo napravo. Paradoxně jsme si velmi jisti tím, že systém skončil ledaskde, jen ne tam, kde bychom v idealizovaném případě předpokládali.

Ljapunov a jeho exponenti

Podobné jako v případě s propiskou je to s chaosem. Systém jako třeba povětrnostní podmínky nějak změříte a podle ideálních hodnot svého měření předpovíte počasí v následujících dnech. Jenže víte také o nejistotách svého měření a chaotičnosti počasí. Stejně jako v případě propisky si po několika dnech jste fakticky jisti tím, že se systém nachází s nejvyšší pravděpodobností všude možně, jen ne tam, kde jste jej předpověděli na základě naměřených hodnot.

[1] Úhly zadáváme v radiánech!

[2] Pak ještě hyperbolické funkce sinh a cosh, ale to jsou jen lineární kombinace reálných exponenciel.



Obr. 2: Náčrt různých vývojů malých výchylek propisky na špičce. Najděte si na grafu nějaké počáteční výchylky δx, δv a svůj vývoj pak získáte následováním šipek. Vidíte, že všechny vývoje až na přímku $\delta v = -\sqrt{g/L}\delta x$ asymptoticky konvergují k $\delta v = \sqrt{g/L}\delta x$, a tudíž vedou k pádu propisky. Pokud vás graf s jednou osou δx a s další δv mate, můžete si osu δv zakrýt a sledovat, kam směřuje všechen vývoj ve směru výchylky δx.

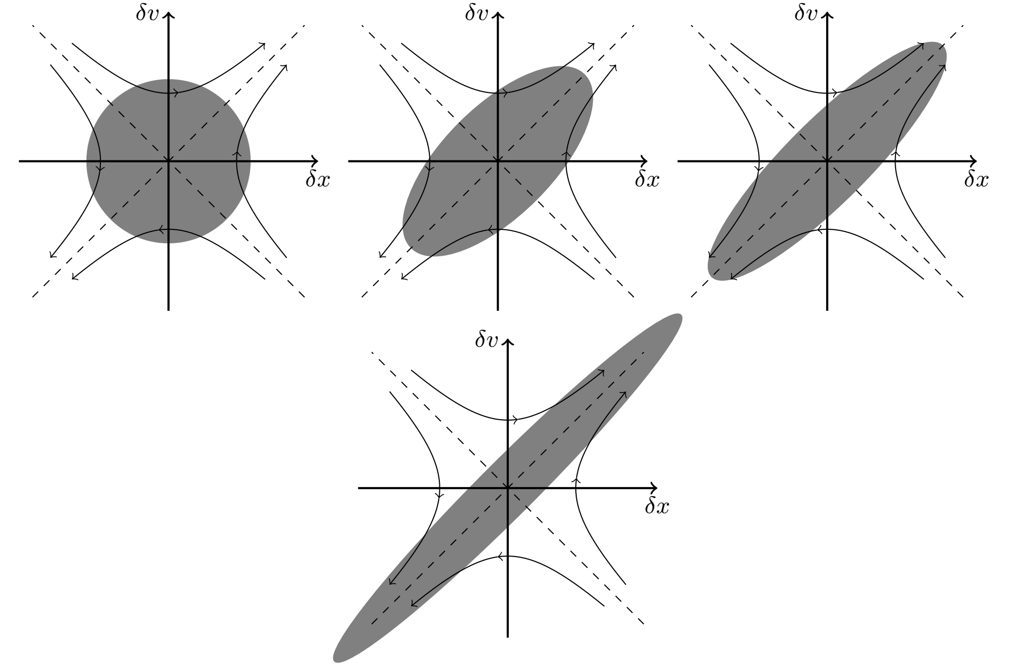
Veličinou, která charakterizuje tento rozpad informace, je takzvaný Ljapunovův exponent. Ljapunovův exponent charakterizuje exponencielní rozbíhání pro velmi blízké stavy. V případě propisky se malá odchylka δx_0 od nestabilní rovnováhy na špičce rozbíhala v nejhorším případě jako $\delta x_0 \exp(\sqrt{g/L}t)$, v nejlepším by se sbíhala jako $\delta x_0 \exp(-\sqrt{g/L}t)$. V tomto případě by tedy Ljapunovovy exponenty byly $\pm\sqrt{g/L}$. Jak ale vidíte na obrázku 3, pro rostoucí nejistotu je důležitý hlavně kladný exponent $\sqrt{g/L}$, který roztahuje počáteční podmínky a na hodnotě záporného exponentu vlastně zas až tolik nezáleží.

Pro obecný dynamický systém můžeme definovat Ljapunovův exponent *pro nějakou celou trajektorii* a vlastně nám nevadí, pokud se původní odchylka kromě růstu velikosti okolo původního směru nějak kroutí. Ljapunovův exponent je tedy nějaké číslo λ takové, že platí, že se nějaká obecně vícerozměrná odchylka $\delta \boldsymbol{Z}_0$ od dané trajektorie $\boldsymbol{Z}(t)$ ve své velikosti vyvíjí jako $|\delta \boldsymbol{Z}(t)| = \exp(\lambda t)|\delta \boldsymbol{Z}_0|$.

V jakém čase bychom ale začali sledovat rozbíhavost trajektorií? Na jakém místě bychom měli začít s malinko odchýleným trajektorijním kamarádem? Nejlepší odpověď zní, že rozbíhavost musíme nějak vystředovat přes celou trajektorii. Pokud ale sledujeme trajektorii ve vázaném systému a trajektorie nekonverguje ke statické, pohyb musí nutně pokračovat nekonečně dlouho. Formálně je tedy Ljapunovův exponent definován jako

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{\delta Z_0 \to 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta \boldsymbol{Z}(t)|}{|\delta \boldsymbol{Z}_0|} \right) ,$$

kde limita $\delta Z_0 \to 0$ jen značí, že se zajímáme o nekonečně malé odchylky a jejich rozbíhavost. Limita $t \to \infty$ pak zajišťuje, že zahrnujeme do výpočtu celou trajektorii. To se může zdát dost

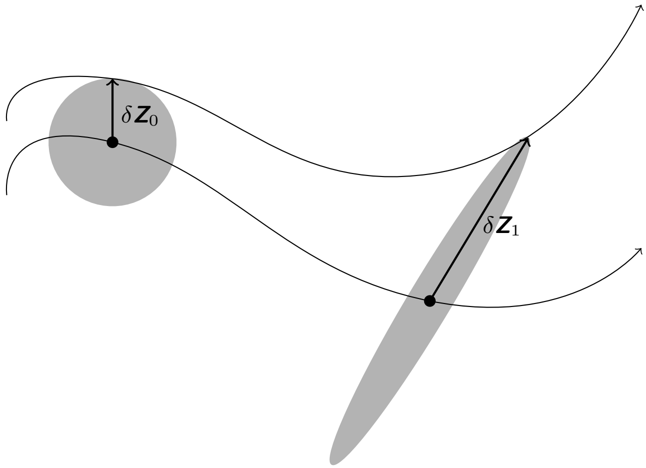


Obr. 3: Náčrt časového vývoje naší oblasti nejistoty ve výchylce propisky. Při předpokladu $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $L = 5\,\mathrm{cm}$ bude naše oblast nejistoty zdeformovaná jako v posledním obrázku během 80 ms. Pokud je na vás graf složitý, stačí z něj jen vysledovat, jak se naše nejistota roztahuje jen podél osy δx tím, že si na ni zdeformovaný kroužek promítnete.

divné, tak vylíčím, jak se takový ljapunovovský exponent spočítá v praxi:

1. Program začne numericky integrovat trajektorii $\boldsymbol{Z}_\mathrm{A}(t)$, jejíž Ljapunovův exponent chceme zjistit a vedle ní úplně malinko odchýlenou trajektorii $\boldsymbol{Z}_\mathrm{B}(t)$.
2. Program sleduje odchylování nebo sbíhání těchto trajektorií a pokusí se na tuto tendenci napasovat exponenciely s různými exponenty. Ten nejlepší fit si poznamená jako lokální Ljapunovův exponent.
3. Jakmile se trajektorie v čase t_moc moc rozeběhnou, vezme odchylku $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{Z}_\mathrm{A}(t_\mathrm{moc}) - \boldsymbol{Z}_\mathrm{B}(t_\mathrm{moc})$, zahodí $\boldsymbol{Z}_\mathrm{B}$ a začne zase integrovat $\boldsymbol{Z}_\mathrm{A}(t)$ spolu s méně odchýlenou trajektorií s počáteční podmínkou $\boldsymbol{Z}_\mathrm{C}(t_\mathrm{moc}) = \boldsymbol{Z}_\mathrm{A}(t_\mathrm{moc}) + \varepsilon\boldsymbol{\Delta}$, kde $\varepsilon < 1$.
4. Tento proces se dlouho opakuje a nakonec program získá přibližnou hodnotu vystředováním všech lokálních Ljapunovových exponentů.

Není to tedy žádná věda, Ljapunovův exponent je jen globální (nebo prostě zprůměrovanou) mírou sbíhavosti či rozbíhavosti blízkých trajektorií. Celá procedura dává nějaký smysl jen díky tomu, že se bavíme o vázaných trajektoriích. Chaotická trajektorie se totiž sice nikdy neopakuje zcela přesně, ale musí pořád létat v těch samých částech prostoru, takže se dříve nebo později začne opakovat *přibližně*. Když tedy zmíněnou procedurou počítáme ljapunovovský exponent po hodně dlouhou dobu, jsme si velmi jisti, že jsme vystihli typické chování trajektorie a že jsme exponent spočítali s poměrně vysokou přesností.



Obr. 4: Náčrt časového vývoje oblasti nejistoty v případě trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem. Malá odchylka $\delta \boldsymbol{Z}_0$ se po nějakém čase vyvine do lehce pootočené a exponenciálně prodloužené odchylky $\delta \boldsymbol{Z}_1$. V tomto obrázku existuje i směr se záporným exponentem, ale vidíte, že maximální vzdálenost odchýlených trajektorií na záporném exponentu nezávisí.

Na obrázku 4 můžete vidět ilustraci ne nepodobnou rozbíhání kruhu počátečních podmínek z obrázku 3. Vidíme na něm, že stejně jako u propisky může nejistota u trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem úplně rozmáznout vývoj tak, že jsme si *téměř jisti* tím, že se nenacházíme tam, kde bychom si idealizovaně mysleli. Na obrázku také vidíte, že pro odhad růstu nejistoty je nejdůležitější *největší* Ljapunovův exponent a ty menší nejsou podobně jako u propisky tak důležité.

Konečně ta definice

Nebudeme to už zbytečně ždímat, definujme chaos. Chaotická trajektorie je taková, která je aperiodická a zároveň má alespoň jeden kladný Ljapunovův exponent. Znamená to, že její tvar je nesmírně komplikovaný a neopakující se, ale také to, že dřív nebo později nějakým vyrušením sklouzne vývoj daného dynamického systému úplně jinam – a to nejčastěji k další chaotické trajektorii.

Existují i alternativní definice chaosu, které se opírají o různé topologické pojmy a představu mísení prostoru počátečních podmínek. To dává samozřejmě velký smysl, protože si člověk dokáže lehko představit, že se malý kroužek počátečních podmínek při kladné rozbíhavosti trajektorií a komplikovaném pohybu rozmaže po celém možném prostoru stavů dynamického systému. Je proto přirozené obejít aperiodičnost a exponenty a rozmíchávání blízkých vývojů vložit rovnou do definice. Vymezení chaosu pomocí exponentů a aperiodičnosti je pro nás ale zdaleka nejpraktičtější.

To je v tomto dílu vše, teď už máme základní výbavu na chápání chaosu. V příštích dílech se konečně podíváme na nějaké zajímavé aplikace toho, co jsme se doteď naučili. Víte třeba, jak se v počítači generují náhodná čísla? A jsou opravdu náhodná? Odpovědí se dočkáte.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.