Úloha IV.3 ... kámen letí

3 body; průměr 1,86; řešilo 35 studentů

Hodíme kulatý kámen o hmotnosti m z výšky h nad hladinou do rybníka o hloubce d. Přibližně za jak dlouho spadne na dno (od okamžiku puštění)? Jak se výsledek změní, když kámen nebude kulatý, ale placatý? *Dominika házela šutry.*

Na kámen působí během pádu tíhová síla $F_G = mg$, vztlaková síla $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g$ a odporová síla $F_{\mathrm{o}} = C_x\varrho S v^2/2$, kde g je tíhové zrychlení, ϱ hustota prostředí, ve kterém se kámen pohybuje, C_x součinitel odporu závisející na tvaru kamene a m, V, S a v po řadě hmotnost, objem, průřez a rychlost kamene.

Nejprve zkusíme výsledek odhadnout – víme, že když bude kámen padat, tak se rychle dostane na rychlost, při které bude výslednice na něj působících sil nulová. Budeme tedy mít rovnici $F_G - F_{\mathrm{vz}} - F_{\mathrm{o}} = 0$, odkud po dosazení můžeme spočítat mezní rychlost jako

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2g(m - V\varrho)}{C_x S\varrho}}\,.$$

Pro orientaci, dosadíme-li známé hodnoty veličin $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\varrho_{\mathrm{vz}} = 1{,}29\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{vo}} = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a odhadneme-li $h = 10\,\mathrm{m}$, $d = 10\,\mathrm{m}$, $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, $S = 20\,\mathrm{cm^2}$, $V = 65\,\mathrm{cm^3}$ a $C_x = 0{,}5$ pro kulatý kámen, tak mezní rychlost ve vzduchu je $v_{\mathrm{mvz}} = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a ve vodě $v_{\mathrm{mvo}} = 0{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Hustota vzduchu je tak malá, že tíhová síla je mnohem větší než vztlaková a odporová. Kamenu bude kvůli tomu trvat docela dlouho, než dosáhne mezní rychlosti – proto pro rozumné výšky je vhodné pád aproximovat jako volný pád v neodporujícím prostředí – čas se potom spočítá jako $t_{\mathrm{vz}} = \sqrt{2h/g}$.

Naopak hustota vody je řádově větší než vzduchu a rychlost kamenu se dostane na konstantní velikost poměrně rychle – můžeme tedy čas odhadnout jako

$$t_{\mathrm{vo}} = d\sqrt{\frac{C_x S\varrho}{2g(m - V\varrho)}}\,.$$

Zanedbáme-li okamžiky, kdy kámen zrychluje a ponořuje se do vody, můžeme celkový čas odhadnout jako

$$t_{\mathrm{odh}} = t_{\mathrm{vz}} + t_{\mathrm{vo}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + d\sqrt{\frac{C_x S\varrho_{\mathrm{vo}}}{2mg - 2V\varrho_{\mathrm{vo}}g}}.$$

Dosadíme-li výše uvedené hodnoty, dostaneme $t_{\mathrm{odh}} = 13{,}4\,\mathrm{s}$.

Nyní zkusme uvažovat přesněji. Pohybovou rovnici již máme téměř vyjádřenu, napišme ji ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{1}{2}C_x\varrho S v^2 - V\varrho g.$$

Označíme-li $B \stackrel{\mathrm{def}}{=} g - V\varrho g/m$ a $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_x\varrho S/(2m)$, pak ji můžeme napsat po separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}v}{B - Av^2} = \mathrm{d}t$$

a následně vyřešit integrací s použitím rozkladu na parciální zlomky (pro jednoduchost zápisu označme $\sqrt{B/A} = v_\mathrm{m}$ jako mezní rychlost)

$$\frac{1}{2\sqrt{AB}} \ln \frac{v_\mathrm{m} + v}{v_\mathrm{m} - v} = t$$

$$v = v_\mathrm{m} \frac{e^{2t\sqrt{AB}} - 1}{e^{2t\sqrt{AB}} + 1} \,.$$

Další integrací odvodíme rovnici pro výpočet dráhy

$$s = \int_0^t v \;\mathrm{d}t = \frac{v_\mathrm{m}}{\sqrt{AB}} \ln \frac{e^{t\sqrt{AB}} + e^{-t\sqrt{AB}}}{2} \,.$$

Pro velké časy můžeme z poslední rovnice vyjádřit čas jako

$$t = \frac{As + \ln 2}{\sqrt{AB}} \,.$$

Upravíme-li, máme

$$t_\mathrm{vyp} = \sqrt{2m} \left(\frac{\frac{hC_x\varrho_\mathrm{vz}S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x\varrho_\mathrm{vz}Sg(1 - V\varrho_\mathrm{vz}/m)}} + \frac{\frac{dC_x\varrho_\mathrm{vo}S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x\varrho_\mathrm{vo}Sg(1 - V\varrho_\mathrm{vo}/m)}} \right) .$$

Po dosazení dostaneme $t_\mathrm{vyp} = 15{,}1\,\mathrm{s}$.

Nebude-li kámen kulatý, ale placatý, změní se jeho součinitel odporu – C_x pak bude 1,2 a časy $t_\mathrm{odh} = 19{,}9\,\mathrm{s}$ a vypočtený $t_\mathrm{vyp} = 20{,}8\,\mathrm{s}$, tedy bude padat déle.

Zájemci si mohou vykreslit graf závislosti rychlosti na čase, aby viděli, jak moc rychle se rychlost blíží mezní rychlosti.

Poznámky k došlým řešením

Řešitelé celkem často neměli pořádek v silách, které na kámen působí, a kdy jdou které zanedbat. Tedy ještě jednou – uplatní se tam tíhová, odporová a vztlaková, a to ve vzduchu i ve vodě! A pak také v tom, jak se kámen pohybuje – nebude zrychlovat donekonečna, po nějaké době se jeho rychlost ustálí. Jak bylo řečeno ve vzoráku, ve vodě to bude mnohem dřív, z toho plynou prvotní přiblížení. Pokud zapomínali některou sílu zmínit nebo jim kámen neustále zrychloval, řešitelé přicházeli o body.

Stokes vs. Newton Mnoho řešitelů počítalo se Stokesovou odporovou silou $F = 6\pi\eta rv$, kde η je kinematická viskozita a r je poloměr kamene. Tento vzorec platí, když obtékání kamene v tekutině je laminární, ne turbulentní. Pro rozlišení typu proudění se používá Reynoldsovo číslo definované jako $\mathrm{Re} \stackrel{\mathrm{def}}{=} vr/\eta$. Hranice mezi turbulentním a laminárním prouděním se pohybuje v intervalu 2000–4000 (je-li Re větší, je proudění turbulentní). Zkusíme-li Re vyčíslit (jako rychlost bereme ustálenou), dostaneme hodnoty řádově 10^6, takže počítat musíme s odporem Newtonovým, který závisí na druhé mocnině rychlosti.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`