

24. ročník, úloha V. 4 ... zelená revoluce (4 body; průměr 3,67; řešilo 9 studentů)

Jaderná energie je stále kontroverzní zdroj energie a mnohé státy mají v úmyslu upouštět od jejího používání. Zaměřme se ale nyní na problém skladování jaderného odpadu. Představme si, že v roce 2000 bylo založeno zbrusu nové úložiště radioaktivního odpadu a navezen první čerstvý radioaktivní materiál, ale záhy bylo odsouhlaseno, že na úložiště bude každý další rok dovezeno o 5% méně čerstvého radioaktivního odpadu než rok předchozí.

Pro jednoduchost předpokládejme, že radioaktivní odpad má poločas rozpadu 100 let (běžný radioaktivní odpad má daleko delší poločas rozpadu). Poradte obyvatelům přilehlých obcí, kterého roku se mohou těšit na nejvyšší dávku radiace, a umožněte jim tak třeba napláňovat založení rodiny. Při řešení můžete s výhodou použít váš oblíbený tabulkový procesor, třeba Excel nebo Calc.

Márovni se zalíbilo v Prupjati

Uvědomme si, že intenzita záření je v každém okamžiku úměrná množství ještě nerozpadlého materiálu. Je tedy jedno, zda vyšetřujeme časovou závislost množství nerozpadlého radioaktivního materiálu, nebo časovou závislost intenzity záření. Připomeňme, že poločas rozpadu je doba, za kterou se rozpadne polovina radioaktivních jader. Aktivita jedné navážky materiálu klesá v čase jako výraz $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/100}$.¹

Celková úroveň záření I_r v r -tém roce je dána součtem příspěvků ze všech předchozích navážek, aneb

$$I_r = \sum_{j=0}^r 0,95^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(r-j)/100} \quad (1)$$

Nyní toto realizujeme v Calc (Excelu). Do prvního řádku, hlavičky tabulky, vypíšeme pořadí roku, tedy čísla r od 0 až třeba do 100. Do druhé řádky necháme vypočítat funkci $\left(\frac{1}{2}\right)^{r/100}$, neboli příspěvek navážky z nultého roku k radiaci v r -tém roce. Další řádek bude obsahovat příspěvek navážky z prvního roku k radiaci v každém roce. Tento řádek vznikne přenásobením předešlého řádku konstantou 0,95 a posunutím o jedno pole doprava. Posunutí o jedno pole doprava dosáhneme tak, že každá buňka bude 0,95násobkem buňky o jednu nalevo a nahoře od ní. Tento vzorec stačí zadat jen jednou a poté přetáhnout po celém požadovaném poli. Úroveň radiace v r -tém roce bude tak odpovídat součtu čísel v r -tém sloupci tabulky. Největší číslo objevíme ve sloupci odpovídajícím roku 2044 (začínáme navážet v roce 2000). *Ján Pulmann* si správně uvědomil, že řada (1) lze snadno sečíst jako geometrická řada, vytkneme-li člen $\left(\frac{1}{2}\right)^{r/100}$ před sumu. Někteří z Vás zase vycházeli z toho, že množství uloženého materiálu v r -tém roce dostaneme rekurzivně $m_r = 0,5^{1/100} m_{r-1} + 0,95^r m_0$.

Úloha jde řešit i pomocí integrálního počtu, pokud přejdeme od diskrétního navážení odpadu ke spojitému. Vztah (1) se pak modifikuje na

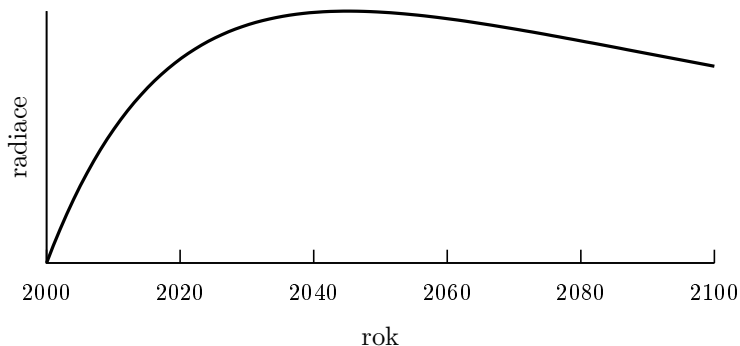
$$I(t) = \int_0^t 0,95^\tau \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(t-\tau)/100} d\tau \quad (2)$$

Exponenciály se snadno zintegrují a výsledkem je závislost tvaru

$$I(t) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{t/100} - 0,95^t,$$

¹⁾ V řešení bereme čas jako bezrozměrný počet let.

kteřá je znázorněná na obrázku 1. Vidíme, že to je vlastně rozdíl dvou exponenciálních poklesů. Při spojitém navázení maximum radiace nastane začátkem roku 2045, kvalitativní průběh závislosti bude ovšem stejný jako při diskrétním navázení. Integrál (2) je tvaru $I(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ a vyjadřuje skutečnost, že intenzitu v čase t získáme součtem příspěvků, které „vznikly“ v předešlých časech τ ve velikosti $f(\tau)$ a na situaci v čase t mají vliv daný faktorem $g(t-\tau)$, kterýžto je závislý na časovém prodlení od jejich vzniku. Uvedený integrál se nazývá *konvoluce funkcí f a g* a ve fyzice se s ním budete pravděpodobně potkávat velmi často.



Obr. 1. Úroveň radiace v průběhu let

Marek Scholz
mara@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licenci Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.