

Milí řešitelé!

Právě jste dostali řešení 4. série úloh Fyzikálního korespondenčního semináře a spolu s nimi také zadání série nové. Je možné, že vám nedošly všechny opravené úlohy, protože vám posíláme nové zadání spolu s aktuálními informacemi co nejdříve ještě před soustředěním, které se koná 19.–26. března. Ze stejného důvodu u řešení úloh chybí statistiky.

Posunuli jsme termín odeslání seriálu z 4. série na odesílací termín 5. série, abyste měli více času na jeho řešení.

Blíží se **Den s experimentální fyzikou**, vyhlašujeme **soutěž** za účelem navrzení co nejúžasnějšího **návrhu na trička** FYKOSu a chystáme spoustu dalších novinek, které se ale projeví až od příštího ročníku semináře – takže se máte na co těšit!

Soutěž o nejlepší návrhy na tričko

Rozhodli jsme se vyhlásit soutěž o nejlepší návrhy na tričko FYKOSu. Trička FYKOSu vypadají již po řadu let víceméně podobně a chceme z tohoto stereotypu vystoupit. Pravidla jsou jednoduchá. Motiv na tričku by měl, ideálně vtipným způsobem, vyjadřovat, že ten, kdo ho nosí, řeší FYKOS nebo se zajímá o fyziku – jinak se fantazii meze nekladou. Vítězem se stane ten, jehož návrh použijeme jako potisk na trička. (Vítězů může být i více. Pokud vybereme více návrhů, odměníme každého vítěze zvlášť. Vítěz ale nemusí být žádný, pokud se nám nebudou návrhy líbit a žádný se nepoužije.) Vítěz za odměnu dostane tři trička potištěná jeho vlastním návrhem ve velikostech a barvách, které si sám vybere.

Uzávěrka soutěže bude **16. května 2011**. Návrhy posílejte Terce Jeřábkové na emailovou adresu terkaj@fykos.cz.

Těšíme se na vaše originální návrhy.

Den s experimentální fyzikou

Jako každý rok i letos vás srdečně zveme na tradiční celodenní akci s názvem *Den s experimentální fyzikou* (DSEF), kterou pořádáme přednostně pro řešitele FYKOSu samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži a případně pro vaše přátele a pedagogický doprovod. Dostanete jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě, kteří jistě rádi zodpoví vaše další dotazy. DSEF se letos uskuteční **v pondělí 11. dubna 2011**.

Letošní DSEF se primárně uskuteční v objektech MFF UK v Praze na Karlově. Nabídka exkurzí je letos velice široká – program je uveden na stránce <http://fykos.cz/akce/dsef> společně s přihlašovátkem a dalšími podrobnostmi o organizaci a pokyny. Dále zde najdete seznam všech přihlášených účastníků, se kterými si můžete domluvit společnou cestu! Pokud by hrozilo, že byste cestovali sami, můžete v případě volné kapacity přihlásit svého kamaráda se zájmem o fyziku. Rovněž se DSEFu může zúčastnit váš pedagogický doprovod. V tom případě nechte též vyplnit přihlášku a do poznámky pro organizátory uvedou, že jsou pedagogickým doprovodem.

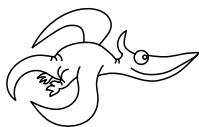
Letošní novinkou je možnost si vybrat skupinu podle preferovaných exkurzí. Ty vás letos zavedou na Katedru fyziky materiálů, Fyzikální ústav, Katedru chemické fyziky a optiky, Katedru fyziky kondenzovaných látek a přijede za vámi, pro její velkou oblibu, i Katedra fyziky nízkých teplot.

Přihlášky

K přihlášení, prosíme, používejte výhradně *webový formulář*, který je zprovozněn na FYKOSích stránkách na již zmíněné adrese <http://fykos.cz/akce/dsef>, ale před jeho vyplněním se dobře seznamte s pokyny! Jiné formy přihlášky již neakceptujeme. Všem přihlášeným zašleme v týdnu před akcí podrobné informace a omluvenku do školy, která zároveň poslouží jako potvrzení vaší účasti. Web sledujte průběžně a k řešení jakékoli situace co nejdříve použijte email dsef@fykos.cz!

Uzávěrka elektronických přihlášek je v **pondělí 4. dubna 2011**. S přihláškami, prosíme, neotálejte, vyjednaná kapacita DSEFu, resp. jednotlivých skupin a laboratoří je omezená!

Karel Kolář
karel@fykos.cz



Zadání V. série



Termín odeslání: 18. dubna 2011
Termín doručení: 20. dubna 2011 18:00

Úloha V.1 ... rozcvička

a) sedimentace krve

Zkuste přibližně spočítat, jak rychle probíhá sedimentace lidské krve (usazení zdravých červených krvinek na dně nádoby). Dynamická viskozita η krevní plazmy při 37°C je přibližně $2\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$. (Běžně se měření sedimentace provádí tak, že se krev nechá odstát na jednu hodinu a poté se změří výška již usazených krvinek – bývá obvykle okolo 10 mm.)

Nápověda: Mohl by se hodit Stokesův vztah pro odporovou sílu $F = 6\pi\eta r v$, který platí pro laminární proudění.

b) nevěřte vlastním očím

Aleš jel v poledne tramvají po nábřeží Kapitána Jaroše v Praze směrem na Malou Stranu. Seděl u okna a přímo z jiho-jihozápadu na něj svítilo slunce. Protože se díval před sebe, jedno oko měl ve stínu vlastního nosu. Když ale uhnul očima doprava, zjistil, že levým okem vnímá mírně jiné odstíny barev než pravým. Do jakého odstínu se mu vidění v levém oku zabarvilo a proč?

Úloha V.2 ... Měsíc jako lodička

Z jakých míst na Zemi a kdy vypadá Měsíc jako lodička? Tzn. jeho cípy jsou rovnoběžné s obzorem a osa symetrie je kolmá k místnímu nebeskému poledníku. Pokud si s řešením nevíte rady, můžete si nainstalovat vhodný software (např. Celestia) a celou situaci si prohlédnout z různých míst na zemi.

Úloha V.3 ... těžký řetěz

Řetěz o hmotnosti m a délky l visí svisle těsně nad vahou. Najednou ho upustíme z klidu a začne na váhu dopadat. Jakou hodnotu bude váha ukazovat v závislosti na tom, jaká délka x již na ni dopadla? Zanedbejte rozměry jednotlivých ok řetězu.

Úloha V.4 ... zelená revoluce

Jaderná energie je stále kontroverzní zdroj energie a mnohé státy mají v úmyslu upouštět od jejího používání. Zaměřme se ale nyní na problém skladování jaderného odpadu. Představme si, že v roce 2000 bylo založeno zbrusu nové úložiště radioaktivního odpadu a navezen první čerstvý radioaktivní materiál, ale záhy bylo odsouhlaseno, že na úložiště bude každý další rok dovezeno o 5% méně čerstvého radioaktivního odpadu než rok předchozí.

Pro jednoduchost předpokládejme, že radioaktivní odpad má poločas rozpadu 100 let (běžný radioaktivní odpad má daleko delší poločas rozpadu). Poradte obyvatelům přilehlých obcí, kterého roku se mohou těšit na nejvyšší dávku radiace, a umožněte jim tak třeba naplánovat založení rodiny. Při řešení můžete s výhodou použít váš oblíbený tabulkový procesor, třeba Excel nebo Calc.

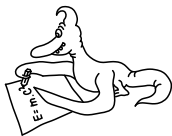
Úloha V.P ... nabitý svět

Jak všichni víme, kladné a záporné elektrické náboje jsou ve vesmíru v rovnováze, jinak by elektrická odpudivá síla překonala gravitační a tělesa by nedržela pohromadě. Ale je ta rovnováha dokonalá? Co když jsou všechna tělesa ve vesmíru nepatrně kladně (nebo záporně) nabitá a odpudivá elektrická síla snižuje účinek gravitace. Jak by se taková nerovnováha projevila?

Navrhněte způsob, jak tuto nerovnováhu zjistit, a odhadněte, jakou nejmenší nerovnováhu jsme touto metodou schopni určit. Nerovnováhou myslíme celkový náboj (rozdíl kladného a záporného) v nějakém velkém objemu.

Úloha V.E ... strunatci

Vytvořte si zařízení, na kterém bude moci být upevněna struna (či gumička) s proměnlivou délkou tak, že bude napínána stále stejnou silou. Prozkoumejte, jak se mění hlavní frekvence vydávané strunou (či gumičkou) v závislosti na délce struny. Na zpracování zvuku můžete použít například program Audacity.

**Řešení IV. série****Úloha IV.1 ... rozcvička** (4 body; průměr 2,79; řešilo 14 studentů)

a) napnutá struna

Frekvence kmitů napjaté struny závisí na její délce l , síle F , kterou je struna napjatá, a na délkové hustotě ρ_l . Určete z těchto údajů vzoreček pro frekvenci struny pomocí rozměrové analýzy.

b) dolů

Mějme činku, jejíž závaží mají tvar disků, které jsou blízko u sebe. Tyčku omotáme jednou provázkem a činku spustíme. Jak rychle padá, pokud se nesmýká? Disky mají hmotnost m a poloměr R , tyčka je nehmotná s poloměrem r .

Karel a Jakub

Napnutá struna

Rozměrová analýza je velmi silný nástroj pro odhadnutí chování nějakého systému, pokud víme, pouze na čem by zkoumaná veličina mohla záviset.

Rozměrová analýza je také velmi dobrou kontrolou správnosti výsledku. Známe-li totiž jednotku, která nám má vyjít a dosadíme-li do vzorce ty, které v něm vystupují, musí být výsledkem ona očekávaná jednotka. Když není, určitě jsme udělali chybu.

Nyní se ale již zaměříme na náš problém. Ze zadání víme, že frekvence by měla záviset na délce l , síle F a hustotě ρ_l . Proto můžeme psát

$$f = l^\alpha F^\beta \rho_l^\gamma. \quad (1)$$

Budeme hledat koeficienty α , β a γ tak, aby rozměr levé i pravé strany byl týž. Pokud bychom našli více možností, může být frekvence rovna libovolné lineární kombinaci výrazů (1).

Najděme nejprve rozklad veličin ze zadání do jednotek SI:

$$\begin{aligned} [l] &= \text{m}, \\ [F] &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \\ [\rho] &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}, \\ [f] &= \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Aby se rovnaly rozměry veličin na levé a pravé straně výrazu (1), musí se rovnat mocniny u všech různých veličin z SI. Proto dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \text{kg:} \quad & 0 = \beta + \gamma, \\ \text{m:} \quad & 0 = \alpha + \beta - \gamma, \\ \text{s:} \quad & -1 = -2\beta. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostáváme $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$ a $\gamma = -1/2$. Proto můžeme napsat výsledek

$$f = \frac{C_0}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}.$$

Hodnotu konstanty C_0 nám však rozměrová analýza neumožňuje zjistit, závisí totiž na tom, kolikátá harmonická frekvence je na struně naladěna.

Dolů

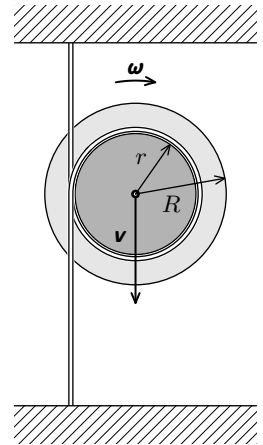
Zvolíme zde jiný, však pro mnohé úlohy velmi silný, nástroj. Tím bude zákon zachování energie.

Celá situace je vyobrazena na obrázku 1. Protože nedochází během pohybu k disipaci energie¹, veškerá potenciální energie se změní na energii kinetickou.

Ze zadání víme, že hmotnost celé soustavy je $2m$, dále uvažujeme, že těžiště se posune dolů o h . Celková změna potenciální energie je proto

$$E_p = -2mgh. \quad (2)$$

Znaménko minus je zde proto, že se potenciální energie zmenší. Nyní ještě vyčíslíme energii kinetickou. Ta má dvě složky: translační a rotační. Uvažujme nyní, že se těžiště pohybuje rychlostí v směrem dolů. Úhlová rychlost otáčení joja okolo těžiště je potom $\omega = v/r$. Protože se



Obr. 1. Činka na provázku

¹) Docházelo by k němu, pokud by bylo vlákno hmotné.

jojo skládá ze dvou disků každého o hmotnosti m a poloměru R , platí pro jeho moment setrvačnosti $J = 2 \cdot \frac{1}{2} m R^2$, konstanta $1/2$ souvisí s tvarem disků a můžeme ji nalézt např. v tabulkách nebo na internetu²⁾. Celková kinetická energie je rovna součtu translační a rotační energie.

$$E_k = E_t + E_r = \frac{1}{2} 2 m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \left(1 + \frac{R^2}{2r^2} \right) m v^2. \quad (3)$$

Jak jsme již uvedli výše, energie se neztrácí, proto je celková změna energie nulová, tj. $E_k + E_p = 0$. Z rovnic (2) a (3) vyjádříme rychlost pohybu

$$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = \sqrt{2ha}$, můžeme určit zrychlení pohybu

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}.$$

Lukáš Ledvina

lukasl@fykos.cz

Úloha IV.2 ... hod' ho do Slunce! (3 body; průměr 1,82; řešilo 11 studentů)

Karel se rozhodl zahodit svůj sešit matematické analýzy na Slunce. Poradíte mu, jakou minimální rychlost sešitu musí udělit, aby sešit na Slunce dopadl? Pro jednoduchost zanedbejte odporové síly, Zemi a Slunce považujte za hmotné body, sešit vypouštíme ze vzdálenosti $R_Z = 6378$ km od hmotného bodu symbolizujícího Zemi, vůči kterému je sešit v klidu a Země obíhá Slunce po dokonalé kružnici. Konstanty, které se vám budou hodit: $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $a = 1 \text{ AU} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$.

Karel si vybijel vztek po neúspěšné zkoušce

Sešitu je potřeba udělit takovou rychlost, aby jednak mohl opustit Zemi (ve směru přímo na Slunce) a pak ještě takovou, aby přišel o moment hybnosti vůči Slunci, aby na něj mohl řachnout (kolmo na předchozí). Pokud by totiž zůstala nějaká nenulová rychlost kolmá na spojnici sešit-Slunce, pak by sešit nikdy neprošel hmotným bodem, za který Slunce máme považovat. Celková rychlost pak bude vektorovým součtem těchto rychlostí.

Vypočteme nejprve úlohu za předpokladu, že v blízkosti povrchu Země je zanedbatelný gravitační vliv Slunce jako první přiblížení. V první části určíme únikovou rychlost ze Země v_1 . (Ta se dá případně najít v tabulkách.) Vypočítáme ji ze zákona zachování energie. Kinetická energie sešitu je $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, kde m je hmotnost sešitu a v je jeho rychlost. Potenciální energie ve vzdálenosti r od těžiště Země je

$$E_p(r) = -\frac{\kappa m M_Z}{r}.$$

²⁾ http://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrvačnosti

Je vidět, že potenciální energie roste, pokud r roste a pro nekonečně velké r jde k 0.

$$\begin{aligned} E_p(\infty) - E_p(R_Z) &= E_k(v_1), \\ \frac{\varkappa m M_Z}{R_Z} &= \frac{1}{2} m v_1^2, \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z}{R_Z}}. \end{aligned}$$

Aby tedy těleso mohlo opustit gravitační vliv Země a uniknout do „nekonečna“, tak musí mít rychlost $v_1 \approx 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Druhá rychlost je vlastně oběžná rychlost v_2 Země kolem Slunce (což se dá také najít v tabulkách). Tu vypočteme z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{m v_2^2}{a} = \frac{\varkappa m M_S}{a^2} = F_g, \\ v &= \sqrt{\frac{\varkappa M_S}{a}}. \end{aligned}$$

Oběžná rychlost je tedy $v_2 \approx 29,8 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Celková rychlost, kterou musíme dodat sešitu tedy bude

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\varkappa \left(\frac{2M_Z}{R_Z} + \frac{M_S}{a} \right)}.$$

Výsledek je $v \approx 31,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Toto je ovšem nejjednodušší přiblížení.

Přesnější postup je uvažovat, že rychlost v_1 je určena překonáním potenciálové hradby, která není tak vysoká jako je pro únik do nekonečna. Pro potenciál částice hmotnosti m na úsečce mezi Sluncem a Zemí ve vzdálenosti r od těžiště Země platí

$$\tilde{E}_p = -\frac{\varkappa m M_Z}{r} - \frac{\varkappa m M_S}{a-r}.$$

Potřebujeme najít místo s nejvyšší hodnotou potenciálu. Zderivujeme potenciální energii podle r a derivaci pak položíme rovnou 0, čímž

$$\frac{d\tilde{E}_p}{dr} = \frac{m M_Z}{r^2} - \frac{m M_S}{(a-r)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_Z(a-r)^2 = M_S r^2.$$

Vychází nám kvadratická rovnice $(M_S - M_Z)r^2 + 2M_Z a r - M_Z a^2 = 0$, jejíž řešení je

$$r_{1,2} = \frac{-2M_Z a \pm \sqrt{4M_Z^2 a^2 + 4M_Z(M_S - M_Z)a^2}}{2(M_S - M_Z)} = \frac{-M_Z \pm \sqrt{M_S M_Z}}{M_S - M_Z} a,$$

přičemž na úsečce mezi Zemí a Sluncem leží řešení s kladným znaménkem. Pokud dosadíme tuto vzdálenost, kterou označíme r_1 , do vztahu pro potenciální energii, pak dostáváme

$$\tilde{E}_p(r_1) = -\varkappa m \frac{M_Z a + r_1(M_S - M_Z)}{r_1(a - r_1)} = -\varkappa m \frac{M_S + 2\sqrt{M_S M_Z} + M_Z}{a}.$$

Potenciální energie sešitu v místě vypuštění byla

$$\tilde{E}_0 = -\frac{\varkappa m M_Z}{R_Z} - \frac{\varkappa m M_S}{a - R_Z}.$$

Rychlost v_1 pak přesněji určíme ze vztahu

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \tilde{E}_p(r_1) - \tilde{E}_0.$$

Číselně pak vychází $v_1 \approx 10,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, což je jenom zhruba o $0,3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ odlišný výsledek od toho, kde jsme zanedbali gravitační vliv Slunce v blízkosti Země. Celková rychlost, kterou by pak měl mít sešit na začátku pohybu je $v \approx 31,7 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Je vidět, že korekce je v řádu procent a původní odhad by byl docela dobrý. I tento výsledek je jenom odhad, protože jsme zanedbali to, že celá soustava rotuje, relativistické efekty a i další vlivy, které se ovšem budou projevovat na výsledné hodnotě jenom v nízké míře (jsou to tzv. vlivy vyšších řádů).

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha IV.3 ... naše staré hodiny lijí čtyři hodiny (3 body; průměr 2,78; řešilo 9 studentů)

Navrhněte tvar přelévacích hodin, aby ubývala výška hladiny lineárně s časem. Za uvažování povrchových efektů, vnitřního tření apod. můžete dostat body navíc.

z rodinné sbírky manželů Nečadových

Hladina v hodinách má ubývat lineárně s časem, tedy podle vztahu $h = vt$. Přičemž v je konstantní rychlost klesání hladiny. Přesýpací hodiny mají většinou rotačně symetrický tvar, takže hledáme křivku, jejímž orotováním okolo ypsilonové osy dostaneme tvar, který zařídí lineární ubývání. Hodiny nemají žádný další odtok, proto musí platit, že to, co proteče průřezem S_1 ve výšce h_1 , musí protéct také nejužším průřezem S_0 v hrdle hodin h_0 . Vyjádříme-li objem, který oběma průřezy proteče za jednotku času a tyto objemy porovnáme, dostaneme rovnici kontinuity (pokud jste tento výraz ještě neslyšeli, rovnice kontinuity jsou rovnice, které ovládají „toky“ fyzikálních veličin, chceme-li zajistit, aby se nikde nic neztrácelo)

$$Sv = S_0v_0,$$

kde v_0 je rychlost výtoku v nejužším místě a v je konstantní rychlost poklesu hladiny.

Zanedbáme-li viskozitu vody a budeme-li předpokládat, že v hodinách nebude nějaké turbulentní proudění, můžeme pro vyjádření výtokové výšky h použít Bernoulliho rovnici

$$h\rho g + \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2.$$

Po vykrácení hustoty a dosazení za v_0 z rovnice kontinuity dostaneme

$$h = \frac{1}{2g}v^2 \left(\frac{S^2}{S_0^2} - 1 \right).$$

Jelikož předpokládáme rotační tvar hodin, plochy S a S_0 budou kruhy. Dosadíme-li za $S = \pi r^2$, dostaneme rovnici křivky čtvrtého stupně

$$h(r) = \frac{1}{2g}v^2 \left(\frac{\pi^2 r^4}{S_0^2} - 1 \right).$$

Pokud by byl otvor v horní nádobce dost malý a nádobka velká, bude rychlost poklesu hladiny v zanedbatelná vůči výtokové rychlosti v_0 , a tak můžeme v Bernoulliho rovnici zanedbat člen $\frac{1}{2g}\rho v^2$. Stejným postupem pak dostaneme rovnici křivky

$$h(r) = \frac{\pi^2 r^4 v^2}{2gS_0^2}.$$

Tereza Zábajníková
terka@fykos.cz

Úloha IV.4 ... sama doma (4 body; průměr 2,56; řešilo 9 studentů)

Terka J. mívá většinou skvělé nápady. Třeba minulé pondělí si od svého oblíbeného dermatologa přinesla 5 litrů kapalného dusíku a ihned ho vylila na zem ve své ubikaci. Ve středu pro změnu odcizila na čerpací pumpě 5 litrů benzínu, který záhy vylila do umyvadla a zapálila. Mohlo se Terce některý den udělat nedobře v důsledku jejich kratochvilí? Aneb jak se v obou případech změnila teplota, tlak a koncentrace kyslíku v ubikaci, pokud tato je dokonale neprodyšná, tepelně izolovaná a rozměrů $3 \times 3 \times 4 \text{ m}^3$? *Mára vykecal příhodu Terky J.*

Tato úloha byla z velké části cvičením na jednoduché vztahy termodynamiky a obecné chemie. Nebudeme Vás proto zatěžovat podrobnostmi a spíše se vynasnažíme upozornit na některá zajímavá místa.

Kapalný dusík

Všechny potřebné tabulkové hodnoty najdeme i na webu³. Všimněme si krátce několika věcí. Kapalný dusík má bod varu $T_N = -195,8 \text{ °C}$, je o pětinu lehčí než voda a jeho výparné teplo Q_N je oproti vodě asi desetkrát menší. Na zmíněném webu lze ověřit, že tepelná kapacita vzduchu se ve vyšetřovaném teplotním intervalu mění maximálně v řádu jednotek procent a budeme ji tedy považovat za konstantní. Ale pozor, tepelná kapacita látek může obecně velmi silně záviset na teplotě, zvláště pak v pevných látkách! Vzduch je ze 78% dusík a proto u dusíku předpokládáme analogické termodynamické vlastnosti – a skutečně, měrná tepelná kapacita plynného dusíku je v podstatě totožná se vzduchem. Na tomto místě musíme dávat pozor, protože budeme dále používat měrnou tepelnou kapacitu za stálého objemu C_V , protože místnost se nerozpíná a plyn nekoná práci. V tabulkách se však častěji uvádí tepelné kapacity za stálého tlaku C_p . K přibližnému přepočtu můžeme užít vztah odvozený pro ideální plyn, a sice $C_p = C_V + R$, kde R je univerzální plynová konstanta. Uvažujeme, že teplota kapalného dusíku je těsně nad bodem varu.

Výslednou teplotu T v místnosti vypočteme z úvahy, že výparné teplo přidaného dusíku plus teplo uložené do ohřátí přidaného dusíku se rovná teplu, které odevzdal původní vzduch v místnosti. Píšeme tedy

$$m_N(Q + C_V(T - T_N)) = m_{\text{air}}C_V(T_0 - T),$$

kde T_0 je původní teplota v místnosti a m_N , m_{air} po řadě hmotnosti (případně látková množství) přidaného dusíku a vzduchu, které snadno spočteme ze zadaných a tabulkových hodnot.

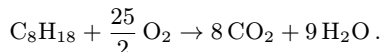
Vyjde $T \approx -20 \text{ °C}$, což není tak strašné, jak jistě uznáte. Látkové množství původního vzduchu dostaneme nejlépe ze známého poznatku, že za normálního tlaku má jeden mol plynu

³) Např. <http://www.engineeringtoolbox.com/>.

objem 22,4 litrů. Zjistíme tak, že vypařením dusíku vzroste látkové množství plynu v místnosti faktorem 1,09. Absolutní teplota ovšem klesla faktorem 0,86, což vede k celkovému poklesu tlaku faktorem 0,94. Parciální tlak kyslíku klesne totožně s teplotou, tedy na 86%, a jeho relativní koncentrace klesne na 92%. To ale odpovídá maximálně vystoupání na Praděd a není tedy životu nebezpečné. Pro tentokrát tedy Terka ještě přežila bez úhony.

Benzín

Předpokládejme pro jednoduchost, že benzín je čistý oktan. Rovnice hoření je pak



Odtud vidíme, že hořením celkové látkové množství plynu v místnosti vzroste pouze o 8%, protože se pouze 12,5 molekul kyslíku vymění za 17 molekul spalných produktů. Látkové množství kyslíku v místnosti je o něco menší než množství potřebné pro vyhoření celého objemu benzínu. Navíc při dostatečně nízké koncentraci kyslíku hoření ustane. Benzín tedy ani nedohoří. Již nyní ale můžeme říct, že si Terka pěkně zavařila. Porovnáním měrné tepelné kapacity vzduchu ($C_V \approx 0,72 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) s výhřevností benzínu ($H \approx 44 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$) rovněž seznáme, že si i pěkně zatopí. Vzrůst teploty ΔT je dán

$$\Delta T(n_{\text{N}_2}C_{\text{N}_2} + n_{\text{CO}_2}C_{\text{CO}_2} + n_{\text{H}_2\text{O}}C_{\text{H}_2\text{O}}) = m_b H,$$

kde m_b a H jsou po řadě hmotnost a měrná výhřevnost benzínu a n , C příslušná látková množství a měrné tepelné kapacity. V teplotní škále tisícovek stupňů se již tepelná kapacita plynu může změnit až několikanásobně. Přesto na základě těchto jednoduchých a přibližných úvah dojdeme k závěru, že teplota může přesáhnout 3000 °C! To je teplota srovnatelná s teplotou svářečského plamene. Rovněž si lze všimnout, že dodané teplo připadající na jeden mol plynu se již blíží disociační energii některých chemických vazeb. Možná jsme opomněli některou důležitou skutečnost, která značně ovlivní výslednou teplotu. Jisté však je, že v místnosti nastanou značně extrémní podmínky neslučitelné se životem. Navíc při reálném spalování bude vznikat řada toxických produktů. Terka to tentokrát dobře neodhadla a musela vzít nohy na ramena.

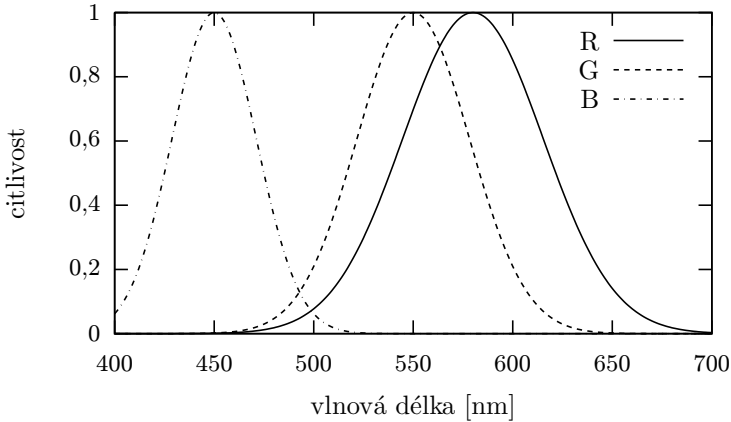
Marek Scholz
mara@fykos.cz

Úloha IV. P ... míchání barev (4 body; průměr 2,20; řešilo 5 studentů)

Chceme-li na monitoru počítače zobrazit azurovou barvu, musíme rozsvítit červený a modrý segment. Azurová barva odráží v nejjednodušším případě světlo dvou vlnových délek (modré a červené), dále pokud budeme mít modrou barvu, tak tato bude odrážet modré světlo a červená obdobně. Když smícháme modrou a červenou temperu, výsledná směs bude mít fialovou barvu, protože modrá složka pohltí vše až na modrou a obdobně také červená. Proto ze směsi těchto barev budeme pozorovat pouze ty vlnové délky, které odrážejí obě složky. Představte si, že tempery jsou složeny z malých kapiček. Jak bude záviset výsledný zrakový vjem na jejich velikosti?
nad nekonečně malými kuličkami rozumoval Lukáš

Nejprve popravme trochu zadání, protože azurovou barvu dostaneme smísením modrého a zeleného světla, nikoli modrého a červeného. Pro názornost proto předpokládejme, že máme kapičky červené a zelené barvy. Pokud Vás již teď nudíme, vězte, že úloha je určitou variací na studium aditivního a subtraktivního míchání barev, aneb RGB a CMYK barevných modelů.

Připomeňme mechanismus barevného vidění. V oku jsou tři různá barviva pohlcující světlo, každé citlivé na jiných vlnových délkách. Zjednodušená a normalizovaná závislost citlivosti na vlnové délce pro každý pigment je vynesena na obrázku 2. Náš barevný vjem závisí na míře vybuzení každého z pigmentů. Dvě různě spektrálně složená světla mohou vyvolat stejný barevný vjem, pokud způsobí shodné vybuzení všech pigmentů. Plocha v grafu pod násobkem spektra světla se spektrální citlivostí určuje míru vybuzení toho kterého pigmentu.



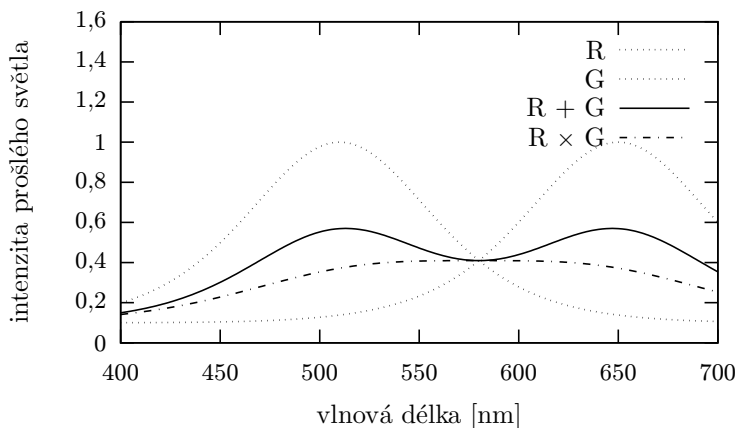
Obr. 2. Spektrální citlivost oka

Uvažujme na chvilku, že nemáme kapičky, nýbrž malé kousky barevných filtrů. Nakonec uvidíme, že kapičky a filtry jsou vlastně dost podobné věci. Barevný filtr osvětluje bílým světlem a filtr absorbuje světlo všech vlnových délek, kromě určité spektrální oblasti v okolí dané barvy. Tuto spektrální oblast propustí do našeho oka. Na obrázku 3 vidíme tečkovaně nejjednodušší schematický příklad spektra světla propuštěného červeným (R) a zeleným (G) filtrem. Když dáme maličké filtry vedle sebe, do oka dopadá červené i zelené světlo, tedy jejich součet, jehož spektrální složení je vyznačeno plnou čarou. Světlo se jeví žluté. Co když ale vezmeme filtry poloviční tloušťky a dáme je za sebe, aby procházející světlo prošlo postupně oběma? První z filtrů část světla pohltí a k druhému filtru pustí jen zbytek. Druhý filtr část z tohoto zbytku pohltí a do oka jsou propuštěny jen ty vlnové délky, které propustily oba z filtrů. Spektrální složení výsledného světla bude v tomto případě dáno násobkem spektrálních propustností obou filtrů, což je znázorněno čerchovanou čarou. Jsou vidět dvě věci. Jednak se průběh světla z filtrů vedle sebe a za sebou liší kvalitativně a jednak filtry za sebou evidentně propouští méně světla, přestože celková tloušťka vrstvy se nezměnila. Oba případy vedou k odlišné míře a vzájemnému poměru vybuzení jednotlivých pigmentů a tedy k vyvolání odlišného barevného vjemu. V případě složitější struktury spekter propustnosti barevných filtrů může být kvalitativní změna tvaru výsledných spekter výrazně větší.

Malé filtry vedle sebe jsou analogií pixelů displeje. Při rozsvícení pouze červeného a zeleného políčka a zhasnutí modrého vnímáme žlutou barvu. To snadno ověříme na monitoru počítače nastavením $(R, G, B) = (200, 200, 0)$. Nastavení $(R, G, B) = (50, 50, 0)$ dává ale zeleno-hnědou barvu, přičemž barva pixelů (kapiček) se nezměnila, pouze poklesl jas. Toto zjištění nám říká, že vnímaná barva závisí nejen na spektrálním složení, ale samozřejmě i na jasu.

Co má ale analogie filtrů společného s mícháním temperových barev? Inu, filtr je pouze sklo nebo plast, ve kterém je rozptýlené absorbující barvivo. Představme si nyní kapku tempery

vzniklou smísením červené a zelené. Při odrazu světla od kapky tempery se odrazu neúčastní pouze vlastní povrch kapky, nýbrž světlo proniká do určité hloubky. Odrazovou vrstvu nenulové tloušťky je pak možno simulovat jako střídající se tenoučké červené a zelené filtry navrstvené nad sebou. A zde již bude docházet k popsanému efektu.



Obr. 3. Skládání filtrů

Při postupném zmenšování kapiček bychom měli pozorovat plynulý přechod mezi situací „filtry vedle sebe“ a situací „filtry nad sebou“, protože se budou současně uplatňovat oba mechanismy. Rozměr kapiček, při kterém začneme pozorovat změny, by měl odpovídat hloubce průniku světla do látky, která závisí mimo jiné na míře absorpce dané temperové barvy.

Marek Scholz
mara@fykos.cz

Úloha IV. E ... vejce sebevrah (8 bodů; průměr 4,83; řešilo 6 studentů)

Z jaké nejvyšší výšky můžete shodit obyčejné slepičí vajíčko na tvrdou podlahu, aniž by se nakrápelo? Co když vajíčko natěsno obalíme nějakým měkkým obalovým materiálem (tj. papír, bublinková folie apod.) s tloušťkou nejvýše 5 mm? Z kolikrát vyšší výšky ho pak můžeme pustit, aniž by se nějak viditelně poškodilo? Vyzkoušejte několik různých obalů.

Karel přemýšlel o padajících vejcích

Měřili jsme pád vajíčka na tvrdou podložku pro různé obalové materiály. Vajíčko dopadalo buď na špičku, patku, nebo na bok.

Teorie

Popsat teoreticky deformaci vejce je velmi složité, zvláště kvůli variabilitě vajec. Pokud bychom se vůbec dopočítali k nějakému kvantitativnímu výsledku, pak by se kvůli všem možným aproximacím stejně neshodoval s praxí.

Intuitivně bychom řekli, že bude rozdíl při pádu vajec obalených daným materiálem a pádem vajec dopadajících na podložku ze stejného materiálu. Popsat tuto situaci teoreticky je opět velmi náročný úkol. Proto raději zůstaneme nohama na zemi a zachováme pragmatický pohled na náš problém.

Tedy jsme měřili rozbitnou výšku h , což je vzdálenost nejbližšího bodu vejce k podložce (mezni výška, ze které se vejce při pádu již rozbije) a tloušťku obalového materiálu d .

To, že vejce obalené nějakým materiálem může spadnout z větší výšky než vajíčko samotné, vás jistě nepřekvapí. Asi vás nepřekvapí ani to, že vítězem mezi obaly je bublinková fólie. Pokud bychom ovšem porovnávali tloušťku obalovacího materiálu s naměřenou výškou, pak se do vedení dostane třívrstvý balónek.

Postup měření

Měřicí soustava se skládala z vodorovné podložky a na ní kolmého měřicího pravítka s nejmenším dílkem 1 mm.

Pro každé vajíčko se začalo na odhadnuté výšce takové, že se při pádu z ní vajíčko ještě nerozbilo. Výška se postupně zvyšovala až na rozbitnou výšku h .

Výsledky

V rámci chyby je prokazatelné, že vajíčko dopadající na patku resp. špičku vydrží pád z větší výšky. To lze vysvětlit prostým rozbořem sil na vajíčko působících v okamžiku dotyku s podložkou. Podobného efektu se dříve používalo při stavbě budov, vzpomeňte na klenuté stropy historických chrámů a katedrál.

Dále jsme zkusili zjistit, zdali je rozdíl v pádu vejce obaleného v daném materiálu a vejcem, které holé dopadá na podložku z onoho materiálu. Jisté odchylky zde byly (konkrétně vejce obalené se jevílo býti pevnější), ale v rámci velké chyby měření, je tento závěr neprokazatelný.

Tabulka naměřených dat

	d_{obal} [mm]	h_{patka} [cm]	$h_{\text{špička}}$ [cm]	h_{bok} [cm]
Holé vajíčko	0	$1,2 \pm 0,3$	$1,4 \pm 0,3$	$0,7 \pm 0,4$
Potravinářská folie	3–4	$2,9 \pm 0,2$	$2,7 \pm 0,3$	$1,9 \pm 0,3$
3 vrstvý balónek	1–2	$4,4 \pm 0,2$	$4,3 \pm 0,2$	$3,8 \pm 0,4$
Noviny	3–4	$3,2 \pm 0,3$	$2,9 \pm 0,2$	$2,5 \pm 0,3$
Toaletní papír	3–4	$3,5 \pm 0,2$	$3,2 \pm 0,3$	$3,0 \pm 0,3$
Bublinková folie	3–5	$5,1 \pm 0,3$	$4,6 \pm 0,3$	$3,9 \pm 0,3$

Diskuse

Již několikrát zmiňovaná velká chyba je způsobená převážně malou přípustnou výškou. Měření by také bylo možné řešit porovnáváním časů pádu jednotlivých vajec (přičemž bychom jako počáteční výšku brali bod na vejci, který se nachází nejbližší podložce). Leč to možná vypadá nadějně, tak při pádu z takto malé výšky bychom vlivem nepřesnosti vyhodnocování naměřených času neměřili vůbec nic.

Další nepřesnost nám přináší samotná nepravidelnost vajíček. Jak již zmiňovaná tvarová, pak také různá tloušťka stěny vajec a nepochybně i jejich vnitřní nehomogenita. Další nepřesností vnáší určení výšky h , která je rovněž ovlivněna tvarem jednotlivých vajec.

Chyby u naměřených hodnot jsou možná překvapivě veliké, přesnost určení výšky pádu jsme odhadli na 0,2 cm. Chyba se nám nepodařila zmenšit ani obrovským množstvím naměřených hodnot a tedy i rozbitých vajec.

Závěr

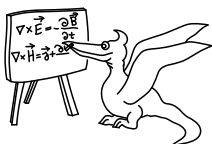
Naměřené hodnoty si můžete prohlédnout v tabulce výše. Měřeními jsme ověřili předpokládanou korelaci mezi tloušťkou obalové vrstvy a rozbitnou výškou. Rozdíl mezi obalením vejce a materiálem podložky se ověřit nepodařilo.

Poznámky k došlým řešením

Různorodost hodnot, které jste naměřili, nás poměrně překvapila. Tento rozptyl může být způsoben nestejnou kvalitou vajec. Například řešitelé mající vajíčka od domácích slepic naměřili průkazně větší rozbitnou výšku.

Doufáme, že se vám po měření experimentální úlohy nezvýšila hladina cholesterolu, ať při následné konzumaci rozbitých vajec, nebo při zpracování naměřených hodnot.

Tereza Jeřábková
terkaj@fykos.cz

*Seriál na pokračování**Kapitola 5: Aplikace teorie konformních zobrazení**Od elektrostatiky k hydrodynamice. . .*

V předminulém dílu jsme se zabývali vztahem harmonických⁴ resp. holomorfních⁵ funkcí k elektrostatice. Nyní se budeme zajímat o proudění tzv. „suché“ vody. Na první poslech to zní úsměvně, ale termíny „suchá“ a „mokrá“ voda se používají jako synonyma pro neviskózní resp. viskózní kapalinu.

Omezíme se na kapalinu, která lokálně nerotuje. Myslíme tím, že cirkulace vektoru rychlosti je nulová v každém bodě. Toto ale neznamená, že by kapalina nemohla rotovat, což si ukážeme dále.

Jak jsme výše uvedli, budeme se zabývat prouděním nestlačitelné tekutiny a nebudeme uvažovat zdroje. Proto veškerý objem tekutiny, který vteče do jistého objemu, musí též vytéci.⁶ Toto můžeme vyjádřit podmínkou

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0, \quad (4)$$

kde jsme označili v rychlost proudění a použili konvenci značení derivace ze třetího dílu seriálu. Dále budeme uvažovat lokálně nerotující kapalinu, což vyjadřuje podmínka

$$v_{x,y} - v_{y,x} = 0. \quad (5)$$

Vztahy (4) a (5) jsou opět Cauchy-Riemannovy podmínky. Proto můžeme vektorovou funkci v nahradit vhodnou holomorfní funkcí, kterou budeme značit též v .

$$v = v_y + i v_x. \quad (6)$$

⁴) Harmonické funkce jsou takové, které řeší Laplaceovu rovnici.

⁵) Reálná i imaginární část holomorfní funkce je také funkcí harmonickou. Obráceně, ke každé harmonické funkci ve 2D existují dvě holomorfní funkce splňující předešlou podmínku.

⁶) Srovnejme toto s Gaussovým zákonem elektrostatiky.

Potenciál proudění v okolí válce

Opět, jako v elektrostátice, budeme hledat komplexní potenciál proudění. Nyní nás ale bude zajímat jeho reálná část představující proudnice (imaginární část odpovídá ekvipotenciálám).

Komplexní potenciál budeme značit $w = \psi + i\varphi$. Jak jsme již odvodili v předešlých dílech, pro rychlost proudění platí $v = dw/dz$.

Abychom mohli pokročit dále, budeme potřebovat ještě jedno hlubší tvrzení, které však nebudeme dokazovat.

Je-li funkce $f(z)$ holomorfní uvnitř mezikruží o vnitřním poloměru r , vnějším poloměru R se středem z_0 , potom platí

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{pro } r < |z - z_0| < R,$$

kde jsme označili $f^{(k)}(z_0)$ k -tou derivaci funkce f v bodě z_0 ; speciálně tato řada má smysl.

Této řadě říkáme *Laurentova*. Má dvě části: První pro $k < 0$ se nazývá hlavní, pro $k \geq 0$ jde o část regulární. Pokusme se nyní využít tohoto tvrzení pro nalezení funkce v resp. funkce w , tj. komplexního potenciálu.

Uvažujme nyní v počátku stojící válec obtékáný tekutinou, která má v nekonečné vzdálenosti od válce rychlost U_∞ ve směru osy x .

Protože nyní zkoumáme proudění okolo válce, stačí nám, aby funkce v byla holomorfní na „mezikruží“ o poloměrech $r = a$, $R = \infty$, kde jsme označili a poloměr obtékaného válce. Dále bychom byli rádi, aby rychlostní pole ve velké vzdálenosti bylo téměř konstantní. Proto budeme rychlost v hledat ve tvaru

$$v = \frac{dw}{dz} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots \quad (7)$$

Provedeme-li integraci výrazu (7), pro potenciál dostáváme

$$w = C_0 z + C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} - \dots \quad (8)$$

Nyní ještě rozepíšeme konstanty $C_k = A_k + iB_k$.

Pokud dosadíme $z \rightarrow \infty$ do rovnice (7) a použijeme-li definici (6), dostáváme z okrajové podmínky $A_0 = 0$, $B_0 = U_\infty$.

Další podmínka, která by měla být splněna je, aby s obvodem válce splývala nějaká proudnice. Toto můžeme vyjádřit podmínkou

$$\psi(|z| = a) = \text{Re } w = \text{konst.}$$

Pokud platí $|z| = a$, můžeme jej napsat ve tvaru $z = ae^{i\vartheta}$. Toto vyjádření dosadíme do rovnice (8) a rovnou určíme její reálnou část.

$$\psi = -B_0 a \sin \vartheta + A_1 \ln a - B_1 \vartheta - \frac{A_2}{a} \cos \vartheta - \frac{B_2}{a} \sin \vartheta - \frac{A_3}{2a^2} \cos 2\vartheta - \frac{B_3}{2a^2} \sin 2\vartheta - \dots$$

Tento výraz se ale musí rovnat konstantě pro všechny úhly ϑ z intervalu $(-\pi, \pi)$. Tato podmínka implikuje⁷ $A_k = B_k = 0$ pro $k \geq 3$, $B_1 = A_2 = 0$ a $B_2 = -B_0 a^2$.

Dosadíme-li zpětně do (8), pro komplexní potenciál a rychlost dostáváme

$$w = iU_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + A_1 \ln z, \quad (9)$$

$$v = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{A_1}{z}. \quad (10)$$

Toto je nejobecnější tvar komplexního potenciálu pro laminární proudění okolo stojícího válce. Jak vidíme, vyskytují se zde dva volné parametry U_∞ a A_1 . Nyní si vysvětlíme, jaký mají fyzikální význam.

Význam U_∞ již známe – jde o rychlost proudění tekutiny ve velké vzdálenosti od válce.

Uvažujme nyní situaci $U_\infty = 0$. Náš potenciál přejde do tvaru

$$w = A_1 \ln z.$$

Ale zde nastává malý problém. Funkci logaritmus jsme definovali jako inverzní k exponenciále. Ta je ale periodická, jelikož platí

$$\exp(x + 2k\pi i) = \exp(x) \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Jedna z možností, jak tento problém překonat, je požadovat, aby $\text{Im} \ln z \in (-\pi, \pi)$. Potom ale nastane při derivování problém. Budeme-li přecházet zápornou část reálné osy, tak budeme pozorovat skok ve funkčních hodnotách právě o výše zmiňované 2π . Tého nepříjemnosti se však můžeme bez problémů zbavit, pokud si uvědomíme vlastnosti logaritmu. Vzhledem k tomu, že se nám nepříjemný logaritmus vyskytuje pouze v potenciálu proudění, nikoli v rychlosti, který je fyzikálně neměřitelný,⁸ můžeme k němu na nějaké množině přičíst konstantu 2π a tímto zařídit, aby nespojitost byla někde jinde. Použijeme malý trik

$$\ln z = \ln \left(z e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \right) = \ln e^{-i\alpha} + \ln \left(z e^{i\alpha} \right) = -i\alpha + \ln \left(z e^{i\alpha} \right).$$

Funkce na pravé straně je již spojitá na záporné reálné přímce, ale nikde nepozměnila rychlostní pole.

Zamysleme se ještě nad tím, jaké situaci toto fyzikálně odpovídá. Protože je funkce logaritmus holomorfní, splňuje lokálně Cauchy-Riemannovy podmínky, a proto je proudění lokálně necirkulující, však proudnicemi jsou kružnice, tj. tekutina krouží okolo středu.⁹ Toto je důvod, proč neexistuje globální potenciál, jak je tomu v elektrostatice.

⁷) Funkce e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$ tvoří bázi prostoru $L^2((-\pi, \pi))$. L^2 je prostor kvadraticky integrovatelných funkcí, tj. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Říkáme, že dvě funkce z tohoto prostoru jsou si rovny, pokud se jejich funkční hodnoty rovnají skoro všude.

⁸) Jediná měřitelná veličina je rychlost, která je jeho derivací, proto můžeme k potenciálu přičíst libovolnou konstantu, aniž by se změnilo pozorované proudění.

⁹) Pokud by nebylo proudění omezeno u středu např. naším válcem, rychlost by musela růst nad všechny meze. V počátku by potom neplatily C.-R. podmínky.

d'Alembertovo paradoxon

Právě jsme vyřešili problém, jaký potenciál odpovídá proudění kapaliny okolo válce. Nyní ještě vyřešíme, jaké síly na tento válec působí.

Abychom byli schopni určit silové působení na válec, musíme určit, jaký tlak je na jeho povrchu. K tomuto účelu nám pomůže znalost Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$$

Vypočteme proto velikost rychlosti obtékání válce. Uvažujme opět případ $A_1 = 0$.

$$v = \frac{dw}{dz} = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right),$$

dosadíme-li $z = ae^{i\vartheta}$, tj. povrch válce, pro velikost rychlosti dostáváme

$$|v| = U_\infty \left| 1 - e^{-2i\vartheta} \right| = 2U_\infty |\sin \vartheta|.$$

Proto pro tlak platí

$$p = C - 2\rho U_\infty^2 \sin^2 \vartheta.$$

Zjišťujeme, že tlak na protilehlých stranách válce je shodný, tedy na válec nebude působit žádná síla! Tomuto rozporuplnému výsledku, který je experimentálně nepozorovatelný, protože neexistuje neviskózní kapalina, se říká *d'Alembertovo paradoxon*. Obecně lze dokázat, že toto platí pro těleso libovolného tvaru v libovolné dimenzi > 1 .

Vztlaková síla

Rozeberme nyní ještě, jaké síly působí na válec, pokud $A_1 \neq 0$. Položme

$$A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

kde Γ je cirkulace vektoru rychlosti po libovolné křivce obsahující počátek soustavy souřadnic.¹⁰

Zderivujeme-li vztah (9) podle z , získáme komplexní rychlost proudění. Dále určíme velikost rychlosti na povrchu válce.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dw}{dz} = iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi z}, \\ v &= iU_\infty \left(1 - e^{-2i\vartheta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi a} e^{-i\vartheta}, \\ |v|^2 &= 4U_\infty^2 \sin^2 \vartheta - \frac{4U_\infty \Gamma}{2\pi a} \sin \vartheta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Nyní můžeme z Bernoulliho rovnice již jednoduše určit, jaký tlak je na povrchu válce

$$p = C - \frac{1}{2}\rho |v|^2,$$

¹⁰⁾ Obecně platí $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = n\Gamma$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a uvažujeme integraci tečné složky \mathbf{v} po uzavřené křivce. Číslo n značí počet „oběhů“ křivky okolo počátku (v kladném/záporném smyslu).

kde za $|v|^2$ dosazujeme z rovnice (11), C je libovolná konstanta a ρ je hustota uvažované tekutiny.

Určeme nyní jaké jsou síly, které působí na válec. Platí

$$R_x = \int_0^{2\pi} -p(\vartheta) \cdot a \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |v|^2 \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

$$R_y = \int_0^{2\pi} -p(\vartheta) \cdot a \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{\rho a}{2} \int_0^{2\pi} |v|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Zde $R_{x;y}$ značí velikost síly, která působí na jednotkovou délku válce ve směru osy z . Faktor a se zde vyskytuje, protože $a \cos \vartheta \, d\vartheta$ je velikost plošky, na kterou tlak působí. Formálně jsme mohli tyto výrazy použít i pro určení výslednice působící síly pro nevířivé proudění. Nyní do těchto výrazů dosadíme ze vztahu (11). První výraz je shodný s případem $\Gamma = 0$, proto reakční síla jím způsobená je nulová. Poslední člen mění okolní tlak jen o konstantu, tedy příspěvek od něj je také nulový. Proto platí

$$R_x = -\frac{U_\infty \Gamma \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = 0, \quad R_y = -\frac{U_\infty \Gamma \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = -U_\infty \Gamma \rho,$$

$$R = R_y + iR_x = -U_\infty \Gamma \rho. \quad (12)$$

Pro integraci jsme užili identit $\sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta$ a $\sin^2 \vartheta = (1 - \cos 2\vartheta)/2$. Zavedli jsme zde komplexní sílu R , se kterou budeme pracovat v poslední části.

Nyní již víme, jak závisí vztlaková síla na parametrech proudění Γ a U_∞ . V poslední části si ukážeme, jaký je vztah mezi těmito veličinami. Před tím ale ještě budeme muset transformovat potenciál proudění.

Žukovského transformace

Nyní se vrátíme na samý začátek vývoje letectví. Jeden z prvních, kdo systematicky zkoumal tvary křídel letadel, byl N. J. Žukovskij. Na jeho počest se jmenují také profily křídel, kterými se zde budeme zabývat. Byly konstruovány za velmi zjednodušených předpokladů: laminárního obtékání, nestlačitelnosti okolní tekutiny a také nulové viskozity, však v časech první světové války byly používány.

Tyto profily vzniknou konformním zobrazením kružnice.

$$\xi = z + \frac{l^2}{z}, \quad (13)$$

kde ξ je poloha transformovaného bodu z a l je parametr transformace.

Jak jsme si ukázali v úloze k předminulému dílu, zobrazíme-li konformně řešení Laplaceovy rovnice, jde opět o řešení Laplaceovy rovnice. Výše jsme však našli potenciál, který řeší obtékání válce. Pokud tento potenciál konformně zobrazíme např. pomocí (13), stále bude splňovat rovnice (4) a (5).

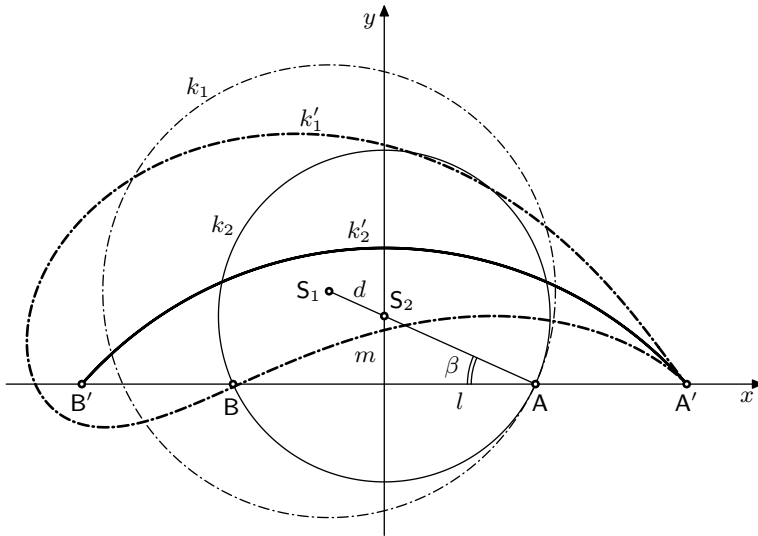
Chceme-li docílit zobrazením kružnice tvarů podobných profilům křídel, musíme speciálně volit střed zobrazované kružnice. To znamená, že zobrazovaná kružnice musí procházet jedním z bodů, kde má transformace nulovou derivaci, tj. $\pm l$, jak si ukážeme později. Tato volba nám zaručí existenci ostrého hrotu. Celá situace je znázorněna na obrázku 4.

Kritické body

Studujeme-li proudění kapaliny, existují body, ve kterých se kapalina nepohybuje. Těmto bodům říkáme kritické.

Nyní se zaměříme opět na obtékání válce. Pokud je cirkulace $\Gamma = 0$, potom jsou tyto body dva: $-a$ a a , kde a opět značí poloměr válce. Jestliže se bude cirkulace zvětšovat, budou se oba kritické body k sobě po povrchu válce přibližovat, až splynou v jeden. Pro větší cirkulace bude jeden z kritických bodů uvnitř kružnice a druhý vně. Celá posloupnost je na obrázku 5.

Jejich poloha se určí jednoduše, položíme-li $v = 0$ v rovnici (10).



Obr. 4. Konstrukce Žukovského profilu

Žukovského hypotéza

S tím, co jsme zatím odvodili, nemůžeme ještě vypočítat přímo vztlak působící na profil křídla, protože neznáme cirkulaci Γ . Toto nám objasní právě Žukovského hypotéza.

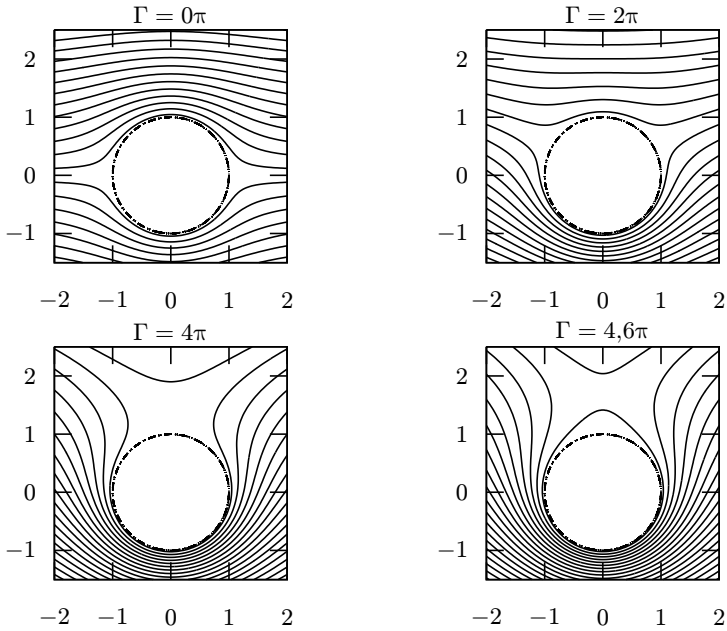
V každém bodu na povrchu křídla musí být konečná rychlost proudění.

Co to pro nás znamená? Pro rychlost proudění po transformaci platí

$$v = \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\xi},$$

kde w značí potenciál proudění okolo válce. Vypočteme-li ale derivaci $d\xi/dz$ v bodě $z = \pm l$, vyjde nám nulová! Což znamená, že $dw/dz = 0$, abychom měli alespoň nějakou naději na konečnou rychlost proudění v okolí špičky. To ale nutně znamená, že kritický bod se musí zobrazit na špičku profilu, aby byla tato podmínka splněna.

Odstavec výše odpovídá také na otázku, proč mají letecké profily ostrý hrot. Pokud by jej neměly, tak by nebyla jasně definována cirkulace Γ a tímto i vztlaková síla.

Obr. 5. Proudnice pro různé hodnoty Γ , $U_\infty = 1$, $a = 1$

Vztlakové síly působící na profil Žukovského

Přejdeme nyní do mírně obecnější situace. Uvažujme, že směr rychlosti proudění vzduchu ve velké vzdálenosti svírá s osou x úhel $-\alpha$, přirozeně toto odpovídá úhlu náběhu křídla α . Matematicky to znamená změnu souřadnic v potenciálu (9) $z \mapsto ze^{-i\alpha}$. Proto náš nový potenciál a jemu odpovídající rychlost proudění mají tvar

$$\begin{aligned}\bar{w} &= iU_\infty \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z, \\ e^{i\alpha} \bar{v} &= iU_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} e^{2i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi z} e^{i\alpha},\end{aligned}\quad (14)$$

kde jsme u potenciálu vynechali zbytečnou konstantu $-i\alpha\Gamma/2\pi$. Aby byla splněna Žukovského hypotéza, musí být cirkulace Γ taková, aby $v(z = ae^{-i\beta}) = 0$, viz obrázek 4, protože bod na původní kružnici $ae^{-i\beta}$ se zobrazí na hrot profilu. Dosazením do (14) a jednoduchou úpravou dostáváme

$$\Gamma = -4\pi a U_\infty \sin(\alpha + \beta).$$

Ještě zbývá dosadit za $a = d + \sqrt{m^2 + l^2}$, viz obrázek 4.

Nakonec ještě určíme, jakou silou působí okolní vzduch na křídlo letadla. Využijeme k tomu vztah (12). Nás však zajímá síla, kterou je letadlo nadnášeno vůči ose letu, tj. směru rychlosti U_∞ . Proto musíme sílu R otočit o úhel náběhu α . Uvedme ještě na závěr, že R_y je vztlaková síla a R_x je odpor, který klade křídlo proti pohybu.

$$R = 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cdot e^{i\alpha},$$

$$R_y = 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha,$$

$$R_x = 4\pi\rho \left(d + \sqrt{m^2 + l^2} \right) U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha.$$

Závěrem

Tyto profily byly objeveny v roce 1912 a skutečně se používaly za první světové války. Byly však záhy nahrazeny profily lepšími vlastnostmi. Velmi brzy se objevily Karmánovy-Trefftzovy profily, které nemají ostrý hrot, ale spodní a horní část odtokové hrany svírá úhel ε . K těmto profilům¹¹ vede transformace

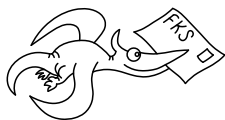
$$\frac{\xi - nl}{\xi + nl} = \left(\frac{z - l}{z + l} \right)^n, \quad \text{kde } n = 2 - \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Pro $n = 2$ přechází na profily Žukovského. Žákem profesora Žukovského byl mj. A. N. Tupolev.

Pokud mají letadla létat většími rychlostmi je nutno započítat také stlačitelnost vzduchu a nezanedbatelné turbulentní obtékání. Další nevýhodou laminárních profilů, jako je profil Žukovského, je možné odtržení proudnic od křídla a následný téměř nekontrolovatelný pád do vývrtky.

Úloha V. S ... aviatická

- Popište geometrickou konstrukci (pomocí kružítka a pravítka) profilu Žukovského.
- Zkuste nakreslit proudnice v okolí profilu Žukovského. Zvolte si takové parametry d/l a m/l , aby měly praktické opodstatnění.
- Jaká vztlaková síla působí na rovnou desku? Jaká vztlaková síla působí na desku tvaru kruhového oblouku?
- Zkuste nakreslit profil křídla odpovídající Karmánově-Trefftzově transformaci.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

FYKOS je také na Facebooku

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹¹⁾ <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Karman.trefftz.gif>