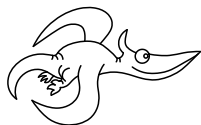


## Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu (ale i výrazně) polepšit. Úlohy jsme pečlivě vybírali, snad vás zvědavost podnítí se do nich pustit. Opravená řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během června.

Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

*Organizátoři*



## Zadání VI. série



*Termín odeslání: 12. května 2008*

Pták FYKOSák letěl v létě 2007 na prázdniny do Jižní Ameriky. Svůj výlet dlouho plánoval, chtěl obletět celý kontinent, zhlédnout husté amazonské pralesy, zasněžené vrcholky And, patagonské nížiny i poušť Atacama, jezero Titicaca a pláž Copacabana. Cesta však dopadla tragicky, pták FYKOSák se už nikdy nevrátil.

Když letěl nad kolumbijskými pralesy, byl mylně považován za tajného agenta CIA a upadl do zajetí Revoluční ozbrojené lidové armády Kolumbie (FARC). Již téměř rok je pterodaktyl uvězněný kdesi v zajateckém táboře uprostřed kolumbijské džungle, strádá hladem a steskem. Za jeho propuštění požaduje FARC vysoké výkupné. Pokud bychom ho chtěli zaplatit, museli bychom zrušit soustředění a možná i celý seminář na několik let.

Dejte své chytré hlavy, silné paže a odvalu dohromady a pomozte nám vysvobodit ptáka FYKOSáka!

### Úloha VI.1 ... *pterodaktyl sestřelen*

Pterodaktyl letěl ve výšce 1 km nad pralesem rychlostí 4 m/s. Guerillový válečník, držící v ruce kalašnikov (kulka opouští hlaveň rychlostí 710 m/s), ho spatřil nad hlavou a vystřelil. Pták FYKOSák byl trefen do křídla a začal padat. Jak daleko od válečníka dopadl? (Odpor vzduchu si dovoluete zanedbat.)

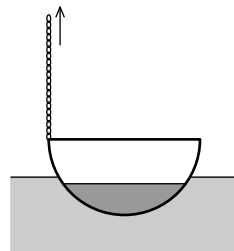
### Úloha VI.2 ... *vaření hada*

Ubohý pterodaktyl ze své klece s obavami pozoruje divokou zvěř v okolní džungli. Zejména ho zaujal párek bezstarostných hadů, kteří se chystali vlézt do jeho klece. Věznitelé je však neúprosně sevřeli klacky tvaru písmene Y. Z hadů bude výborná večeře, malou radost z toho má i pták FYKOSák, ačkoliv dává přednost jinému než hadímu masu.

Tuhé maso jedovatých hadů se musí vařit při vyšší teplotě, k tomu se používá papiňák. Nádoba se naplní z poloviny vodou, v druhé polovině zůstane vzduch, potom se uzavře a pomalu zahřívá. Při jaké teplotě se začne voda v hrnci vařit? V jakých fázích voda existuje při rostoucí teplotě?

**Úloha VI.3 ... hadí polévka**

Když je hadí maso uvařené, kuchaři z něj připravují hadí polévku v měděných hrncích, které mají tvar polokoule o průměru 40 cm. Hrnec s polévkou dávají potom vychladit do nedalekého jezera. Když ho nechají plavat, ponoří se o 10 cm. K bodu na okraji hrnce je připevněn řetízek. Pokud za řetízek zatáhneme a zvedneme tak okraj hrnce o 10 cm, nateče do hrnce voda?



Obr. 1. Kotlík s řetízkem

**Úloha VI.4 ... rychlý úprk**

Pták FYKOSák statečně prchá chodbou (nemůže v ní letět), v patách má dva vojáky, kterým se před okamžikem vymkl z pout. Chodba zatáčí ve tvaru písmene L a pterodaktyl horlivě přemýšlí, jak dál.

Chodba je široká  $b$ , pterodaktyl běží rychlostí  $v_0$  a zatáčka je ve vzdálenosti  $d$ . Pokud velikost ptákovy zrychlení dosáhne hodnoty  $a_0$ , pterodaktyl uklouzne, spadne a bude chycen. Po jaké dráze má běžet a jak se má naklánět, aby ho zatáčka zdržela co nejméně?

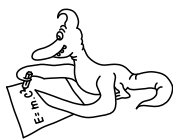
**Úloha VI.P ... mission impossible**

Naplánujte záchrannou misi a vysvobďte ptáka FYKOSáka. Nezapomeňte na plán B, příp. C.

**Úloha VI.E ... magnetický zámek**

Cela, ve které je pterodaktyl vězněn, je uzamčena pomocí magnetického zámku. Americké tajné služby vlastní prototyp tohoto zámku a kousek z jeho magnetu vám posíláme v obálce se sérií. K otevření zámku bez klíče je nutné znát, jak závisí síla mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Změřte co nejpřesněji tuto závislost!

Návod: Mezi oba magnety postupně vkládejte tenké listy papíru a měřte sílu nutnou na odtržení magnetků od sebe.

**Řešení IV. série****Úloha IV.1 ... znají včely geometrii? (4 body; průměr 2,56; řešilo 41 studentů)**

Jestliže jste někdy viděli včelí plást, jistě vás upoutala pravidelnost, s jakou je vybudován. V podélném řezu tvoří stěny buňky pravidelný šestiúhelník a buňky jsou k sobě seskupeny tak, že pokrývají celou rovinu plástu.

Proč mají včelí buňky tvar právě šestiúhelníků, a ne například obdélníků nebo pětiúhelníků?  
Zadal Honza Prachař, inspirován knihou *Matematika kolem nás*.

Včely budou pravděpodobně tvořit nějaké pravidelné obrazce, jinak by musely uvažovat, mezi kterými dvěma stěnami vytvořit jaký úhel, aby jim to vycházelo. Také nás budou zajímat jenom rovinné obrazce, neboť včely budou chtít buňkami prolézat, a tedy budou po celé délce buňky potřebovat stejný průřez.

Buňkami by měla jít pokrýt rovina. Kdyby nebylo možné pokrýt obrazcem rovinu, byly by mezi jednotlivými buňkami nevyužitá volná místa a do plástů by se méně vešlo.

Pravidelné rovinné obrazce, kterými lze pokrýt rovinu, jsou tři – trojúhelník, čtverec a šestiúhelník. Konkrétní volbu zřejmě nebude mít na svědomí pouze jeden důvod, ale důvodů vícero, řekněme si alespoň ty nejnápadnější.

Prvním z nich je, že se velmi nechtějí zbytečně vysilovat, a zvolí tedy takový obrazec, u kterého spotřebují při výstavbě nejméně materiálu. Snadno vypočteme, že při jednotném obvodu je poměr obsahů mezi rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem  $1 : \sqrt{3} : 3$  (uvážujeme pouze pravidelné obrazce, neboť nepravidelné mají poměr obsahu ku obvodu horší), což vypovídá ve prospěch šestiúhelníku.

Dalším důvodem bude to, že se v buňkách líhnou larvy a larvy mají kruhový průřez, tedy by bylo vhodné, aby měly buňky tvar co nejvíce podobný kruhu, aby okolo larev nebylo mnoho volného místa. Toto také splňuje šestiúhelník (uvážíme-li, v duchu první podmínky, pouze obrazce, kterými lze vydláždít rovinu).

Šestiúhelníkové buňky jsou navíc pevnější než čtvercové, protože ve čtvercových by síla působila jenom na svislé přepážky, kdežto u šestiúhelníkových je síla částečně odváděna i do stran.

Také je zajímavé si uvědomit, jak vlastně vypadá včelí oko – je složené z malých šestiúhelníků. Jistě se nabízí otázka, nakolik tato skutečnost ovlivňuje tvar buněk.

Nejčastější chybou v došlých řešeních bylo, že někteří z vás sice správně uvedli, že zvoleným tvarem musí jít pokrýt rovina, ale už zapoměli zdůvodnit, proč by to tak mělo být.



Obr. 2. Včelka  
Mája a Vilík

**Jan Jelínek**

jjan@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV. 2 ... zahřívání koule (4 body; průměr 3,63; řešilo 38 studentů)

V této úloze budeme studovat vliv teploty na moment setrvačnosti kovového tělesa. Pro tento účel necháme tělesem procházet pevnou osu, kolem které se bude otáčet. Jak se změní moment setrvačnosti  $J$  tělesa při zvýšení jeho teploty o  $\Delta T$ , je-li koeficient teplotní roztažnosti kovu  $\alpha$ . Pokud si nevíte rady, zkuste uvažovat kouli nebo válec.

*V Havránkovi se úloha líbila Pavlu Motlochovi.*

Pro vyřešení úlohy nám bude stačit znalost několika základních vztahů. Moment setrvačnosti  $J$  libovolného tuhého tělesa vůči pevné ose se definuje vztahem

$$J = \int r^2 dm, \quad (1)$$

kde  $r$  je vzdálenost elementu hmotnosti  $dm$  od osy otáčení. Změníme-li teplotu tělesa o  $\Delta T$ , změní se vzdálenost libovolného bodu (tedy elementu hmotnosti  $dm$ ) od pevné osy z původní vzdálenosti  $r$  na  $r'$ . Moment setrvačnosti zahřátého tělesa lze zapsat jako

$$J' = \int (r')^2 dm. \quad (2)$$

Předpokládáme-li, že zkoumané těleso je izotropní (materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti), platí mezi vzdálenostmi  $r$  a  $r'$  vztah

$$r' = r(1 + \alpha\Delta T), \quad (3)$$

kde  $\alpha$  je koeficient teplotní roztažnosti.

Z (3) dosadíme do (2) a upravíme užitím vztahu (1)

$$J' = \int r'^2 dm = \int r^2(1 + \alpha\Delta T)^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 \int r^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 J.$$

Moment setrvačnosti se tedy změní o

$$\Delta J = J' - J = (2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2)J.$$

Protože koeficient teplotní roztažnosti  $\alpha$  nabývá řádově hodnot  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , můžeme kvadratický člen oproti lineárnímu zanedbat

$$\Delta J \approx 2\alpha\Delta T J.$$

Velmi nás potěšilo, že úlohu správně vyřešili téměř všichni řešitelé. Jen někteří uvažovali definici momentu setrvačnosti v součtovém tvaru

$$J = \sum_i m_i r_i^2,$$

který je však vhodný pouze pro popis soustav s konečným počtem hmotných bodů. Výsledek, který se dostane použitím tohoto vztahu, je samozřejmě stejný, ale z formálního hlediska je vhodnější použít tvar (1).

*Daniel Šimsa*

daniel@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha IV.3 ... *sopka burácí* (4 body; průměr 1,64; řešilo 22 studentů)

*Nedávno v televizi proběhl dokument o výbuchu sopky Krakatoa v srpnu 1883. Pozoruhodné je, že rachot výbuchu dočasně ohlušil lidi (nějakou dobu nic neslyšeli) ve vzdálenosti 50 km od vulkánu. Dokonce byl slyšet jako vzdálené hřmění ve městě Alice Springs v centrální Austrálii, tj. asi 5 000 km (slovy pět tisíc kilometrů) od sopky.*

*Jaká byla hodnota akustického tlaku v dB v místě výbuchu? Můžeme předpokládat, že platí zákon úbytku intenzity se čtvercem vzdálenosti, či jaký zákon úbytku intenzity bude platit pro tento případ?*

*Úlohu vymyslel pan Janata inspirován zmíněným dokumentem.*

Úloha se zabývala šířením energie exploze ve vzduchu. Nejdříve vysvětlíme rozdíl mezi *rázovou* a *zvukovou* vlnou. Rázové vlny (angl. shockwave) vznikají při uvolnění velkého množství energie z malého objemu. Energie se v prostředí šíří rychlostí několikanásobně větší, než je rychlost zvuku. Při přechodu rázové vlny dochází ke skokovým změnám vlastností prostředí (teplota, tlak, hustota, příp. orientace magnetického pole). Energie nesená rázovou vlnou se vzdáleností velice rychle ubývá (až s třetí mocninou vzdálenosti). Základní zjednodušení, které se při výpočtech používá, je, že tlak a hustota mimo rázovou vlnu jsou zanedbatelné oproti tlaku a hustotě uvnitř rázové vlny. Za přepracovanou teorii vděčíme pánům Taylorovi a Sedovovi z projektu Manhattan. Všechny rázové vlny proto velice rychle degradují na běžné zvukové vlny. Při přechodu rázové vlny se částice prostředí pohybují velkými rychlostmi pouze ve směru jejího šíření. Naproti tomu při přechodu zvukové vlny částice oscilují docela malými rychlostmi oběma směry. Změnu tlaku při přechodu rázové vlny má na svědomí jednak dočasné nahuštění molekul za rázovou vlnou, jednak přímo pohyb molekul od centra exploze (tzv. „blast wind pressure“  $Q$ ). U silných rázových vln (více než cca 207 dB) je druhá složka větší. Při atmosférickém tlaku se všechny vlny intenzivnější než asi 194 dB chovají spíše jako rázové.

Nejprve zkusíme určit akustický tlak za předpokladu, že to, co slyšeli lidé v Austrálii, byl skutečně zvuk. Nanejvýš problematické je zde odhadnout, jak silné asi bylo ono „vzdálené hřmění“. Použijeme pracovní odhad 40 dB (tichá ulice; muselo být dostatečně silné, aby ho bylo možné odlišit od hluku pozadí, tj. ne úplně na hranici slyšitelnosti). Intenzita zvuku je definována vztahem

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt,$$

kde  $T$  je perioda kmitů,  $p(t)$  je okamžitá hodnota tlaku a  $\mathbf{v}(t)$  rychlost pohybu částic. Měří se ve wattech na metr čtvereční. Absolutní hodnota intenzity zvuku (intenzita je vektor) v decibelech je

$$L_I[\text{dB}] = 10 \log \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2}, \quad (4)$$

respektive

$$L_P[\text{dB}] = 20 \log \frac{p}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}}, \quad (5)$$

kde  $I$  je absolutní hodnota intenzity v místě měření a  $p$  průměrná hodnota tlaku při přechodu zvukové vlny. Zde je nutno poznamenat, že rovnost

$$L_I = L_P$$

platí pouze přibližně a to jen do intenzity asi 120 dB. Pak už se kvůli fyzikálním vlastnostem vzduchu začínají obě hodnoty lišit a je třeba mezi nimi rozlišovat.

Absolutní hodnota intenzity ubývá se čtvercem vzdálenosti

$$I \sim \frac{1}{r^2}.$$

Důležitou roli hrají také jiné procesy. Vzduch se při přechodu zvukových vln mírně zahřívá. Všechny procesy, které se na disipaci energie podílejí, se většinou dají shrnout a jejich vliv lze popsat exponenciálním poklesem intenzity se vzdáleností. Ubývání se zvyšuje se stoupající vlhkostí, teplotou a je kvadraticky závislé na frekvenci zvuku (nízké frekvence jsou tlumené nejméně). Díky šikovně zvolené stupnici se dá mluvit o konstantním úbytku (v decibelech) na jednotku vzdálenosti. Za normálních podmínek jsou to pro nízké frekvence asi 4,7 dB/km, což je zanedbatelné na malé vzdálenosti, ale velice výrazné na 5000 kilometrech.

Vypočteme-li absolutní hodnotu intenzity v Austrálii číselně, dostaneme  $I \doteq 10^{-8} \text{ W/m}^2$ . Intenzita 1 km daleko od výbuchu by byla 5000<sup>2</sup>-krát větší, z čehož dosazením do vzorečku (4) dostaneme hodnotu akustického tlaku asi 114 dB. Kdybychom teď započítali exponenciální ubývání 4,7 dB/km, dostali bychom 23 000 dB, což není realistický výsledek. Při použití rovnosti  $L_I = L_P$  by pro tlak vycházelo naprosto nesmyslných více než  $10^{1000} \text{ Pa}$ . I když je za to částečně zodpovědný zjednodušený model poklesu intenzity se vzdáleností (exponenciální ubývání), dá se také nahlédnout, že energie se musela v blízkosti exploze šířit jiným způsobem (tlaková vlna).

Teorie rázových vln je poměrně komplikovaná. My použijeme několik přibližných empirických vzorečků, které se používají v pyrotechnice na odhad síly exploze (převzato z Kinney, *Explosive Shocks in Air*). Samotný přetlak rázové vlny  $P$  (rozdíl tlaku před přechodem a těsně po přechodu rázové vlny) klesá jako

$$P[\text{dB}] \sim 20 \log \left( \frac{1}{r^3} \right). \quad (6)$$

Celkový akustický přetlak (ono  $p$  ve vzorci pro  $L_P$ ) má však ještě složku způsobenou pohybem molekul

$$Q = \frac{1}{2} \rho U^2,$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu a  $U$  je rychlost pohybu molekul od exploze. Když  $c$  bude rychlost zvuku, tak  $U$  vypočítáme jako

$$U = \frac{P}{c\rho}$$

pro tlaky do zhruba 175 dB. Pro tlaky vyšší by byl vztah komplikovanější. Přibližně můžeme  $Q$  určit jako

$$Q = \frac{2,5 \cdot P^2}{7 \text{ atm} + P}.$$

Akustický tlak, který ohlušil lidi 50 km od výbuchu, odhadneme na  $L_P \doteq 160$  dB (výstřel z hluchné pušky 1 m od ucha). Podle (5) je tedy  $p = 2$  kPa. Jelikož  $p = P + Q$ , dosazením z předchozího vztahu máme

$$p = P + \frac{2,5 \cdot P^2}{7 \text{ atm} + P} \Rightarrow P \doteq 1986 \text{ Pa}.$$

Ve vzdálenosti 50 km od výbuchu bylo tedy hlavní složkou  $P$ . Půl kilometru od výbuchu (tedy už uvnitř exploze) pak byl podle (6)  $P$  o 120 dB větší, tj. asi 1 GPa.  $Q$  bylo jednoduše  $2,5 \cdot P = 2,5$  GPa (těch 7 atm je oproti 10 000 atm už zanedbatelných a uvedené vzorečky mají přesnost horší než 3 dB). Dohromady tedy  $p \doteq 3,5$  GPa neboli úctyhodných 285 dB.

V literatuře je zvykem udávat až 310 dB (anebo asi 14 Gt TNT, zde se už používá Richterova stupnice), což je více než desetkrát víc, ale myslí se tím celková energie uvolněná během několika dní trvání exploze. Jde jenom o řádový odhad. Podle *U.S. geological survey* měla exploze Sv. Heleny intenzitu asi 286 dB a 200 mil daleko ji bylo stále slyšet s hladinou intenzity 163 dB (rozbila několik oken). Blíže k výsledku by se možná dalo dopracovat i lepším odhadem intenzity zvuku, který ohlušil lidi 50 km daleko.

Prakticky ve všech došlých řešeních se řešitelé snažili vypočítat šíření exploze jako šíření zvuku. Za správně vypracovanou teorii šíření zvuku a výsledek jsme však mohli udělit jenom dva body. Kdo si uvědomil, že zvuk je ve vzduchu tlumen kromě kvadratického úbytku se vzdáleností také exponenciálně, a správně okomentoval nesoulad s pozorováním (buď vyšlo směšně vysoké číslo v blízkosti exploze, anebo naopak příliš nízké v Austrálii), mohl dostat až tři body. Nejde o to, za každou cenu se dopracovat k výsledku, někdy je ho třeba také správně interpretovat. Řešení, ve kterém by byl správně použitý výraz „tlaková“, resp. „rázová vlna“ by nebylo hodnoceno méně než čtyřmi body. Bohužel žádné takové nedošlo.

Z dalších chyb byl velmi častý argument, že kvadratické ubývání pro zvuk neplatí, protože zvuková vlna nemá kulový tvar, případně zbytečné úvahy o zakřivení Země. Velikost té části vlnoplochy, která dorazila až k detektoru (do ucha), se se vzdáleností měnila kvadraticky. Vybraný kus vlnoplochy nesl stále stejné množství energie nějakou rychlostí, takže výkon ve  $W/m^2$ , resp. intenzita zvuku se měnila kvadraticky. Je přitom úplně jedno, jaký tvar měla celá vlnoplocha. Zakřivení Země nevádí proto, že zvuk se bude šířit převážně nad povrchem, nebo se tam alespoň bude šířit nejrychleji (je zde nejvyšší tlak). Huygensův princip praví, že každý bod vlnoplochy se bude chovat jako zdroj vlnění, takže zvuk se bude kolem zakřivené Země ohýbat. Počítat se proto bude běžná vzdálenost po Zemi.

Odhadnout správně hlasitosti, které bylo po výbuchu slyšet, byl skutečně problém. Je však nesprávné předpokládat, že v Alice Springs musel být zvuk na hranici slyšitelnosti (to by ho pak asi nebylo možno rozeznat od zvuků pozadí) a také práh bolesti nezpůsobuje dočasné ohlušení. Exploze ohňostroje jsou mnohem hlasitější, ale díky tomu, že trvají velice krátce, tak to zas tolik nebolí. Akceptovali jsme skoro jakýkoli reálný odhad hlasitosti. Vážnější problém bylo odhadnout, v jaké vzdálenosti od centra počítat hlasitost výbuchu. Při výbuchu bylo vyvrženo více než  $180 \text{ km}^3$  horniny do atmosféry. Ve vzdálenosti 1 km od centra je proto už uvnitř exploze. Odhady jako 1 m, anebo dokonce méně jsou proto nesprávné. Dostatečným přiblížením ( $r \rightarrow 0$ ) by přece jinak bylo možné dosáhnout libovolně vysokou hodnotu.

*Peter Greškovič*  
grepe@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV.4 ... zachraňte ledvinu (4 body; průměr 2,33; řešilo 15 studentů)

ÚOOZ<sup>1</sup> zjistil, že mafie disponuje mobilními válečnými lasery, které jsou všechny řízeny z centrály v horském pohraničním sídle Oberniederdorf, vzdáleném od zbraní maximálně 50 km (ve větší vzdálenosti je signál už slabý a nespolehlivý). Z centrály sledují dění v podsvětí v Karlových Varech, na které všechny lasery míří, aby udeřily v pravý čas.

Pomozte nevinným obyvatelům Karlových Varů nalézt vhodný tvar, příp. i umístění spojitě zrcadlové plochy, která by pokud možno všechny laserové paprsky odrazila nejlépe na řídicí centrálu! Problém můžete řešit v rovině, ale zejména oceníme prostorové řešení, pokud existuje. Samozřejmě je požadován důkaz, aby Karlovarští peníze neinvestovali zbytečně.

*K oprášení znalostí a dovedností z geometrie zadal Pavel Brom.*

V prvním kroku řešení je vhodné přeformulovat zadání na čistě geometrický problém, který budeme řešit s použitím geometrických a fyzikálních úvah. Mobilní lasery v podstatě určují paprsky náhodných směrů, které však mají jednu vlastnost společnou – protínají se v jediném místě (Karlovy Vary), které si můžeme dovolit nahradit bodem F (focus). Rovněž řídicí centrálu Oberniederdorf si nahradíme bodem G (gangsters, gauners). Přeformulované zadání v ideálním případě (tzn. všechny paprsky se odrazí do bodu G) zní: K pevným bodům F, G hledáme spojitou plochu (v prostoru), která každý libovolný paprsek jdoucí do jediného bodu (F) odrazí do jiného bodu (G).

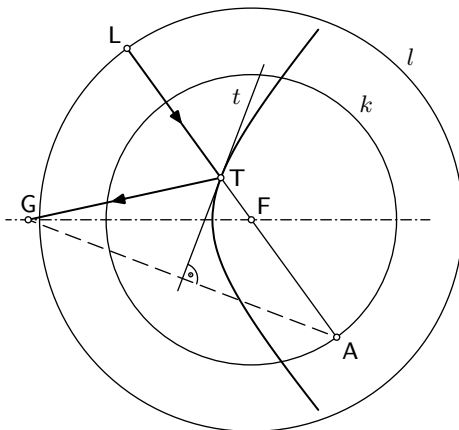
Po fyzikální stránce předpokládáme přímočaré šíření paprsků ve vzduchu a platnost zákona odrazu, který je však důsledkem obecnějšího Fermatova principu. Právě v této úloze můžeme elegantně využít Fermatův princip, který říká, že světlo se šíří právě po časově extrémálních trajektoriích; v tomto případě extrémálními rozumíme nejkratší časové spojnice, tedy i nejkratší z hlediska uražené dráhy, neboť rychlost šíření světla ve vzduchu předpokládáme konstantní<sup>2</sup>. Je zřejmé, že přímka procházející body F a G zároveň představuje osu symetrie problému, a tedy postačí řešit problém v rovině tuto přímku obsahující. Prostorové řešení pak dostaneme snadno rotací nalezené křivky kolem osy FG. Můžeme se navíc pokusit odhadnout tvar takové křivky k pevným bodům F, G (viz obr. 3).

Zakresleme do obrázku jeden libovolně vybraný laser L. K realizaci Fermatova principu vypustíme všechny laserové paprsky v určitém okamžiku z kružnice  $l$ , a protože její poloměr

<sup>1</sup> Útvar pro odhalování organizovaného zločinu

<sup>2</sup> Nakreslete si rovinné zrcadlo, oko a předmět, např. tyčku, a rozmyslete si, že zobrazení rovinným zrcadlem využívající zákona odrazu Fermatův princip automaticky splňuje. Využijete vlastnosti zobrazení (osové souměrnosti) a trojúhelníkovou nerovnost.

$|LF| = c_1 = \text{konst.}$  proběhnou za stejný čas, dorazí do jejího středu F rovněž ve stejný okamžik, což požadujeme v duchu Fermatova principu. Nyní jim však do cesty postavíme odraznou plochu, která má všechny paprsky soustředit do jiného jediného bodu G. Žádný paprsek, žádný



Obr. 3. Odrazná plocha

bod odrazné plochy by v duchu Fermatova principu neměl být výsadní, tedy očekáváme, že i po odrazu všechny paprsky dorazí do bodu G ve stejný okamžik za předpokladů naší realizace. Bod odrazu pro laser L označme T a vedme jím tečnu (tečnou rovinu)  $t$  k hledané křivce (odrazné ploše). Všechny paprsky musí urazit stejnou dráhu  $|LA| = c_2 = \text{konst.}$ , tedy osová souměrnost s osou  $t$  musí zobrazit bod G na A, tzn.  $|GT| = |TA|$ . Jestliže si uvědomíme, že rozdíl vzdáleností v absolutní hodnotě

$$\begin{aligned} ||GT| - |TF|| &= ||GT| + |TL| - |TL| - |TF|| = |( |GT| + |TL| ) - ( |TL| + |TF| )| = \\ &= |( |TA| + |TL| ) - ( |TL| + |TF| )| = ||LA| - |LF|| = |c_2 - c_1| = \text{konst.}, \end{aligned}$$

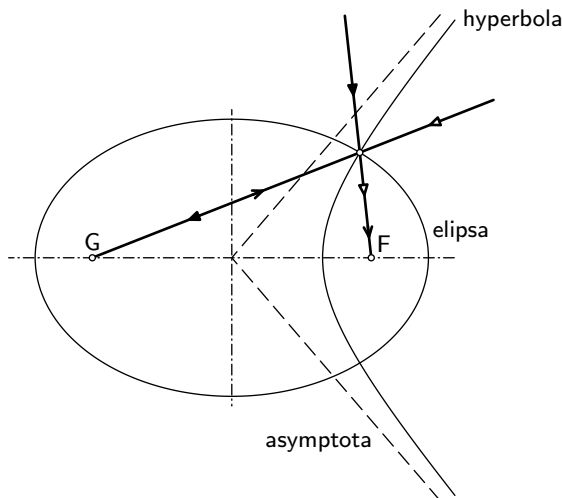
odhalujeme zajímavou vlastnost, že rozdíl vzdáleností libovolného bodu (T) křivky od dvou pevně daných bodů (F a G) je konstantní. To je geometrická definice hyperboly (v rovině), resp. rotačního hyperboloidu v prostoru<sup>3</sup>.

Navíc jsme během řešení objevili zajímavou vlastnost kuželoseček: Sférická plocha vrací paprsky jdoucí ze středu křivosti zpět do středu. Všechny paprsky vycházející z jednoho bodu do jiného odrazí právě jen rotační elipsoid. Nyní jsme zjistili, že rotační hyperboloid soustředí všechny paprsky směřující do jednoho bodu (primárního ohniska) do jiného (sekundárního ohniska). Odsud plyne, proč sekundární zrcátka oblíbených astronomických teleskopů (Cassegrainův dalekohled) mají tvar právě rotačního hyperboloidu. A konečně rotační paraboloid odrazí rovnoběžné paprsky (jdoucí z ohniska v nekonečnu) do svého ohniska. Současně jsme odůvodnili název ohnisko pro tyto významné body.

<sup>3)</sup> Zájemcům doporučujeme přečíst si analogické autorské řešení úlohy II.4 ze XVII. ročníku, kde je navíc uveden přímý důkaz hypotézy, který lze rovněž přeformulovat pro hyperbolu či rovinné zrcadlo. Řešení se liší v technickém detailu myšlenkové realizace Fermatova principu. V případě hyperboly jsme museli laserový paprsek vyslat z vnější obálkové kružnice do středu, zatímco u elipsy mohla být jakási vnitřní kružnice degenerovaná na pouhý bod – jedno z ohnisek – a konstantní rozdíl vzdáleností přešel v konstantní součet.



Nezapomeňme na diskusi k původnímu problému. Dobře víme, že hyperbola má dvě větve a obě nutně splňují požadavek úlohy. Dále si vzpomeneme na významné přímky k větším hyperboly, tzv. asymptoty, k nimž se hyperbola blíží v nekonečnu. Zde uplatníme zadanou okolnost, že lasery nemohou být dále od centrály (G) než jistá vzdálenost, tedy díky omezení prostorového úhlu příchozích paprsků úloha má vždy řešení, kterých je v principu nekonečně mnoho.



Obr. 4. Porovnání hyperboly a elipsy

Shrňme, že hledanou spojitou odraznou plochu představuje rotační hyperboloid, přičemž vzdálenost sídel (ohnisek)  $|FG|$  odpovídá dvojnásobku excentricity ( $2e$ ) a maximální vzdálenost centrály G od laserů L vymezuje prostorový úhel pro možné asymptotické kužele. Ke zvolené větvi hyperboly (před uplatněním rotační symetrie problému) a ke zvoleným asymptotám existuje příslušná velikost velké a malé poloosy. Tím jsou tvar i poloha odrazné plochy jednoznačně určeny a zároveň předpokládáme, že celé město F (Karlovy Vary) bude za ní schováno – plocha jím nebude procházet. Z obou větví hyperboly bychom zřejmě doporučili tu bližší ke Karlovým Varům, zejména kvůli úspoře materiálu, a tedy i finančních prostředků.

Jediný *Jan Hermann* řešil problém užitím Fermatova principu, za což byl odměněn premiovým bodem. Mnoho řešitelů doporučilo postavit rovinné zrcadlo kolmé na spojnici obou sídel a přesně v polovině jejich vzdálenosti. Tato rovinná plocha představuje zvláštní případ našeho obecného řešení (konst. rozdíl  $c_2 - c_1 = 0$ ), jde sice o méně úspěšné řešení, ale správné a s důkazem bylo oceněno 3 body. Za jiné kuželosečky než hyperbolu jste podle celkové argumentace mohli obdržet nejvýše 1 bod, za přijatelný důkaz svého tvrzení další 1 bod. Několik řešitelů by nechalo postavit kulové zrcadlo, což je zajímavý návrh, uvážíme-li, že tvar kuželoseček poblíž vrcholů lze poměrně dobře vystihnout tzv. oskulační kružnicí – tento argument však nevedl nikdo. Můžeme jen spekulovat, proč nám řešení neposlal sám karlovarský rodák, ale nejspíš o něm mafie dobře věděla . . .

*Pavel Brom*

paja@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha IV . P ... projekt 5** (4 body; průměr 2,52; řešilo 27 studentů)

Navrhnete spravedlivou (či co nejvíce spravedlivou) pětistěnnou kostku. Přesněji máme na mysli takové pětistěnné těleso, které se při hodu na podložce zastaví na každé své stěně se stejnou pravděpodobností.

Vymysleli náruživí hráči Aleš Podolník a Marek Scholz.

Patrně každý aspoň jednou v životě házel hrací kostkou. Jistě jste si po několika pokusech říkali, že právě ta hodnota, kterou potřebujete, nikdy nepadne. Za takovouto hráčskou smůlu však zpravidla nemůže kostka samotná, ale cosi jako „zákon schválnosti“. Jeho opodstatněnost se dá matematicky ukázat na mnoha příkladech. Jmenujme alespoň obligátní prasklou žárovku v sériovém zapojení<sup>4</sup>. Avšak skutečnost je taková, že klasická (šestistěnná) hrací kostka i v tom nejobyčejnějším provedení je velmi dobře spravedlivá, neboť její tvar vychází z krychle. Krychle je jedno z pěti platónských těles, kterými dále jsou pravidelný čtyřstěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Žádné z uvedených těles však nemá pět stěn. První otázka, kterou je třeba zodpovědět, je, zda existují i jiná tělesa, jejichž užitím bychom obdrželi spravedlivou hrací kostku? Zkušenější hráči se možná setkali i s „desetistěnkami“ apod. Jsou však takové kostky spravedlivé? Jejich výrobci nás o tom sice přesvědčují, ale jaká je skutečnost?

Předně si ujasněme, že výstupem naší práce by mělo být těleso s rovinnými stěnami, které dopadne se stejnou pravděpodobností na každou z těchto stěn. Tím zakážeme poněkud zvrhlu kostku tvarem připomínající ragbyový míč. Co musí takový objekt splňovat? Především musí mít ve všech polohách po dopadu stejnou potenciální energii, tj. vzdálenost všech stěn od těžiště kostky musí být stejná. Dále by měly být všechny stěny identické (až na zrcadlovou symetrii) a identicky umístěné vůči všem ostatním. Jinak řečeno jedna stěna od druhé nesmí být rozlišitelná. To je z toho důvodu, aby při odvalování kostky po podložce nešlo předvídat, na kterou stěnu se kostka aktuálně převálí. V libovolném směru se vykoná stejná práce, tedy není nic pro kostku výhodnější. Vykonání stejné práce ve všech směrech pak ve svém důsledku vynucuje značnou symetričnost kostky. A konečně, těleso musí být nutně konvexní.

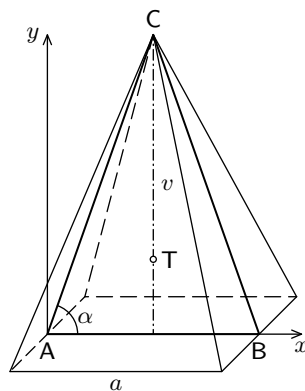
Pro konvexní tělesa s víc než třemi stěnami platí Eulerův vzorec

$$V + N = E + 2,$$

ve kterém  $V$  značí počet vrcholů,  $N$  počet stěn a  $E$  počet hran. Jelikož jsou si všechny stěny spravedlivé kostky rovny, musejí mít všechny také stejný počet hran. Tento počet označme  $M$ . Protože každá hrana přísluší dvěma stěnám, máme snadno

$$E = \frac{1}{2}MN.$$

Protože nás zajímá pětistěnná kostka,  $N = 5$ , musí být číslo  $M$  sudé. Taková kostka se tedy musí skládat z pěti shodných sudouhelníků. Z nich ovšem přichází v úvahu jedině čtverec, neboť každý další s více hranami by znamenal i větší počet stěn kostky.



Obr. 5. Jehlan

<sup>4</sup>) Viz například Jiří Anděl: *Matematika náhody*.

Tímto jsme dokázali, že zcela spravedlivá pětistěnná kostka nemůže existovat. Pokusme se v následujícím textu alespoň o nějaké dostatečně dobré přiblížení. Ihned nás napadnou dvě poměrně pravidelná pětistěnná tělesa: jehlan a trojboký hranol. Prozkoumejme obě z hlediska podmínek, které jsme definovali ve třetím odstavci.

Těžiště jehlanu se nachází v jedné čtvrtině jeho výšky, kterou označme  $v$ . Dále necht  $a$  je délka strany podstavy. Podíváme-li se na řez jehlanu kolmý k podstavě a obsahující výšku, dostaneme opět trojúhelník, po němž v souladu s podmínkami požadujeme, aby vzdálenost těžiště jehlanu byla od všech stran shodná. Tento trojúhelník je zřejmě rovnoramenný. Umístíme počátek soustavy souřadnic do jednoho z vrcholů při základně, bez újmy na obecnosti necht je to  $A$  v obvyklém značení trojúhelníka  $ABC$ . Pak souřadnice těžiště jehlanu jsou  $T = (a/2, v/4)$ . Chceme nyní provázat parametry  $a$  a  $v$  nějakou rovnicí. Přímka, jejíž podmnožinou je strana  $AC$  je vyjádřitelná jako  $p : y = x \operatorname{tg} \alpha$ , kde  $\alpha$  je vnitřní úhel trojúhelníka, který očividně splňuje  $\operatorname{tg} \alpha = v/(a/2)$ . Vzdálenost bodu  $T$  od přímky  $AC$  vypočítáme ze známého vzorečku

$$|AC, T| = \frac{\left| \frac{2v}{a} \cdot \frac{a}{2} - \frac{v}{4} \right|}{\sqrt{\left(\frac{2v}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}}.$$

Chceme, aby tato vzdálenost byla stejná jako vzdálenost  $T$  od přímky  $AB$ . Rovnost

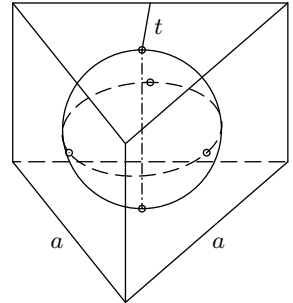
$$\frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{v}{4}$$

je splněna, platí-li  $\sqrt{2}a = v$ . Bude-li mít jehlan takovýto poměr délky strany podstavy a tělesové výšky, pak bude mít ve všech stabilních polohách stejnou potenciální energii. Jehlan přesto není dobrým kandidátem pro spravedlivou pětistěnnou kostku. (Při kutálení je zapotřebí různých energií pro přetočení se přes jednotlivé hrany. A co teprv „horní“ vrchol!)

Naproti tomu situace s trojbokým hranolem je o poznání veselejší. Můžeme si ji přiblížit následujícím myšlenkovým experimentem. Mějme sféru a na ní umístěme pět elektronů. Ty se vlivem elektrostatických sil odpuzují, dokud se nedostanou do energeticky nejúspornější konfigurace. Je-li sféra normovaná (tj. má jednotkový poloměr), stačí najít minimum funkce

$$E = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 \frac{1}{d_{i,j}},$$

kde  $d_{i,j}$  označuje vzdálenost  $i$ -tého od  $j$ -tého elektronu (vyjádříme je pomocí Pythagorovy věty a díky znalosti rovnice sféry). Řešení tohoto problému je matematicky velmi pracné, naštěstí existují počítače, s jejichž pomocí nám vyjde, že dva elektrony budou na pólech a zbylé se rovnoměrně rozmístí podél rovníku. Vzdálenosti mezi těmi ekvatoriálními jsou  $\sqrt{3}$ , resp.  $\sqrt{2}$  mezi jedním z nich a elektronem na pólu. Jestliže nyní zkonstruujeme tečné roviny procházející



Obr. 6. Rozmístění pěti elektronů na sféře

místa, kde se nacházejí elektrony, dostaneme přesně trojboký hranol. Navíc bude splňovat podmínku o těžišti. To však není postačující podmínka férovosti kostky.

Pojďme ještě vypočítat optimální poměr velikostí jednotlivých stran hranolu. Zřejmě jeho základnou je rovnostranný trojúhelník. Nechť  $a$  je jeho strana a dále  $v$  buď jeho výška. Zřejmě platí  $v = \sqrt{3}a/2$ . Vzhledem k tomu, že těžiště trojúhelníka je v jedné třetině výšky, je vzdálenost těžiště od libovolné strany pláště hranolu  $t = \sqrt{3}a/6$ . Tělesová výška hranolu musí nutně být  $2t$ . Mějme tedy takovýto trojboký hranol a určíme nyní, jak velkou vykonáme práci při překlopení z jedné boční hrany na jinou. Z Pythagorovy věty máme

$$\Delta W \sim \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2} - t = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{12}a^2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a = t,$$

Práce při překlápění z boční stěny na podstavu je naproti tomu úměrná výrazu  $(\sqrt{2}-1)t$ . Ačkoli toto není ani polovina předchozí hodnoty, konstrukce kvalitnějšího modelu by byla mnohem komplikovanější, a proto si dovolíme takovouto nepřesnost.

Symetrické pětistěnné těleso jsme ukázali, že neexistuje, nicméně jsme našli hranol, který velmi dobře splňuje podmínky z úvodu. Kostky, které bychom však na základě této představy vyrobili, by však zcela jistě stoprocentně spravedlivé nebyly. Nicméně tento fakt neodrazuje výrobce, aby pětistěnnou kostku prodávali. Existuje dokonce patent číslo United States Patent 6926275, který vychází z naší představy o trojbokém hranolu a drobnými úpravami jej vylepšuje, aby byl spravedlivější. Uvedené těleso však není pětistěnné, a tedy nevyhovuje podmínkám zadání úlohy. Naproti tomu „ragby“ kostky jsme uznávali jako splňující zadání úlohy, ačkoli si jejich řešitelé situaci významně zjednodušili.

Závěrem doplníme zdroje, ze kterých jsme čerпали:

- Diaconis, Keller: *Fair Dice*, American Math. Monthly 96, 1986;
- Fair Dice, <http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm>;
- Min-Energy Configurations of Electrons On A Sphere, <http://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm>;
- Properties of Dice, <http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm>;
- US Patent 6926275, <http://www.freepatentsonline.com/6926275.html>.

*Tomáš Jírotka*

byrot@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha IV.E ... valivý odpor (8 bodů; průměr 4,00; řešilo 21 studentů)

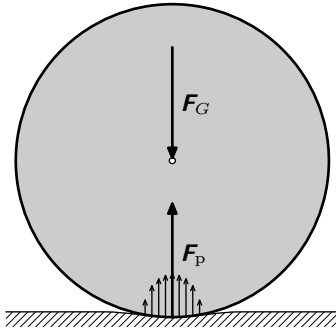
*Pečlivě experimentálně prověřte, zda valivý odpor válce závisí na jeho poloměru či ne.*

*Různé názory v knihách objevil Jano Lalinský.*

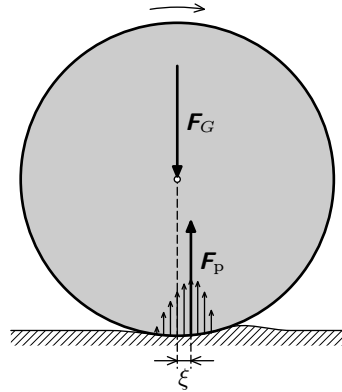
V následujícím vzorovém řešení se nebudeme pokoušet příliš o vlastní třesuté invence a raději shrneme a okomentujeme vaše nápady a přístupy k experimentální úloze.

#### *Teorie*

Když válec leží nehybně na vodorovné podložce, podložka i válec se trochu zdeformují a vznikne styčná plocha. Lze si představit, že na této ploše je nějakým způsobem rozložen tlak, kterým podložka působí na válec. Tento tlak se místo od místa mění, ale je rozložen symetricky a výsledná síla působící od podložky na válec je stejně velká a opačného směru než tíhová síla a míří do těžiště válce. Jedině v tom případě totiž jsou výslednice sil a momentů působící na válec nulové, a válec je tedy v klidu.



Obr. 7. Silové působení mezi podložkou a válcem v klidu



Obr. 8. Silové působení mezi podložkou a válcem v pohybu

Když se válec kutálí, tlak není ve styčné ploše rozložen symetricky a ani styčná plocha nemusí ležet přesně pod těžištěm válce. Jak válec na náběžné straně stlačuje podložku, rozložení tlaku se spíše posune ve směru pohybu a výsledná síla od podložky  $F_P$  již nemíří do těžiště válce, i když vektor  $F_P$  má stejnou velikost a směr jako tíhová síla  $F_G$  působící v těžišti. Vůči těžišti válce (tedy jeho středu) potom  $F_P$  působí momentem valivého odporu  $M = \xi F_P$ , kde  $\xi$  značí takzvané rameno valivého odporu. V literatuře se dočteme, že rameno valivého odporu  $\xi$  je dáno materiálem válce a podložky, nikoli však poloměrem válce. Často se valivý odpor vysvětluje také tak, že válec před sebou tlačí jakýsi hrbolek.

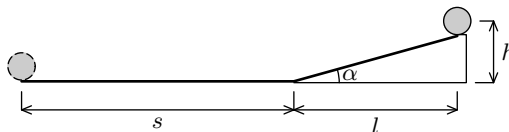
Moment  $M$  má na zpomalení valení stejné účinky, jako kdybychom působili silou  $F_v = M/r$  ve středu válce proti směru pohybu. Jak vyplývá z předchozího výkladu, je síla valivého odporu  $F_v$  jistě závislá na tíze válce, a lze tedy psát

$$F_v = \mu(r)mg = \frac{\xi(r)}{r}mg. \quad (7)$$

Naším úkolem je nyní zjistit, zda a jak členy  $\mu$  a  $\xi$  závisejí na poloměru válce.

### Příprava a provedení měření

Budíž naší motivací pro vyřešení úkolu otázka, zda se vyplatí vlaky opatřit většími koly. Snažme se proto zajistit, aby zkoumané válce různých poloměrů měly shodnou hmotnost a podélný rozměr, hmotnost vlaku se také příliš nezmění, když bude mít trochu větší kola.



Obr. 9. Schéma experimentu

Pravděpodobně v domácích podmínkách nejsnáze a nejlépe proveditelný způsob měření, který také většina řešitelů použila, je následující.

Válec pouštíme z určité výšky  $h$  z nakloněné roviny. Válec na nakloněné rovině získá kinetickou energii a dále se valí již po vodorovné podložce pokryté nějakým měkkým materiálem. Vlivem valivého odporu se na vodorovné podložce v určité vzdálenosti zastaví. Potenciální energie válce se snížila o  $mgh$  a válec opět stojí, a tedy síla valivého odporu vykonala práci rovnou rozdílu potenciálních energií. Práce síly  $F_v$  tedy je

$$F_v s = mgh. \quad (8)$$

Nejlépe je měkkým materiálem pokryt i nakloněnou rovinu. Vyhne se tak přemýšlení nad tím, jak velký je valivý odpor pro materiál roviny a zda ho můžeme zanedbat. Jakou práci vykoná  $F_v$  při cestě válce po nakloněné rovině? Můžeme uvažovat i obecně zprohýbanou rozjezdovou dráhu. Předpokládejme, že síla  $F_v = \mu N$ , přičemž  $N$  je složka tíhové síly ve směru kolmém na podložku. Práce síly  $F_v$  na každém maličkém úseku dráhy  $dl$  je pak

$$dW = \mu mg \cos \alpha dl,$$

kde  $\alpha$  je sklon elementu dráhy  $dl$ . Ovšem výraz  $\cos \alpha dl$  je přesně roven průmětu úseku dráhy  $dl$  do vodorovné osy. Práce síly  $F_v$  vykonaná na rozjezdové dráze je tedy

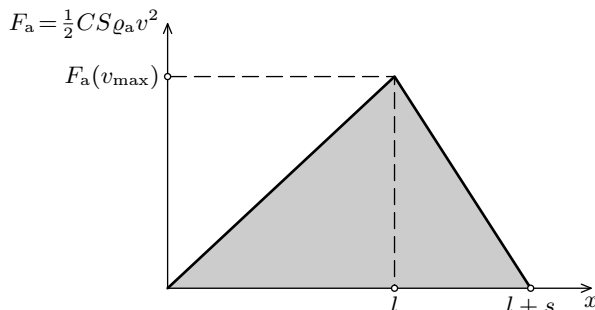
$$W = \mu mgl,$$

kde  $l$  je průmět rozjezdové dráhy do vodorovné roviny. Nedomýšleli jsme zvýšené přitlačení válce v důsledku odstředivé síly při zakřivení rozjezdové dráhy. Ale v případě, že naše rozjezdová dráha má jen malý sklon a výšku a není moc divoká, nemusíme se předešlými úvahami vlastně vůbec zabírat a řekneme, že nám touto nejasností vznikne chyba maximálně 2 cm.

Můžeme zanedbat odpor vzduchu? Pro naše konkrétní uspořádání, jehož parametry jsou uvedeny dále, odpor změní výsledky o několik procent, a má tedy již cenu se jím zabývat a provést korekci na odpor vzduchu. Síla odporu vzduchu je přibližně dána

$$F_a = \frac{1}{2} CS \rho_a v^2,$$

kde  $S = 2rb$  je průřez válce délky  $b$ ,  $\rho_a$  hustota vzduchu,  $v$  rychlost válce a  $C \approx 1$  je koeficient odporu vzduchu pro těleso tvaru válce. Kvadrát maximální rychlosti, kterou válec v ideálním případě dosáhne, je  $v_{\max}^2 = 2gh/(1 + J/mr^2)$ , kde  $J$  značí moment setrvačnosti válce.



Obr. 10. Závislost velikosti odporové síly vzduchu na ujeté vzdálenosti

Když válec zrychluje na rozjezdu, kvadrát rychlosti v podstatě lineárně roste s uraženou dráhou, a když válec naopak zpomaluje,  $v^2$  lineárně klesá s uraženou dráhou. Práce vykonaná odporem vzduchu je rovna obsahu plochy pod křivkou závislosti  $F_a$  na poloze. Plocha pod touto křivkou je podle předešlé věty vlastně trojúhelník a práci  $W_a$  vykonanou odporem vzduchu na dráze  $L = l + s$  lze odhadnout výrazem

$$W_a = \frac{1}{2} F_a(v_{\max}) L.$$

Bohužel odpor vzduchu je ošemetná věc a kupříkladu koeficient  $C$  závisí na mnoha věcech, dále  $F_a$  působí ve skutečnosti na dráze  $l/\cos\alpha + s$ , a proto odhadujeme chybu určení  $W_a$  až na 30 %. Význam odporu vzduchu by bylo možno snížit zvýšením hmotnosti válců.

Můžeme si být jisti, že máme vodorovnou podlahu? Podlaha by neměla mít větší stoupání než 1 mm na metr, což je zhruba i sklon rozlišitelný lepší vodováhou. Přesto jsme radši provedli měření i pro opačný směr kutálení a měření vyšlo v podstatě stejně a sklonem podlahy se dále zabývat nebudeme.

Válec se tedy zastaví po uražení dráhy, která splňuje

$$mgh = F_v L + W_a = \left( \mu mg - \frac{F_a(v_{\max})}{2} \right) L.$$

Odtud

$$\mu = \frac{\xi}{r} = \frac{h}{L} - \frac{F_a(v_{\max})}{2mg}. \quad (9)$$

Pro vyhodnocení členu  $\mu$  a  $\xi$  užijeme tento vztah.

Vidíme, že třeba  $\xi$  závisí na veličinách  $r$ ,  $h$ ,  $L$  atd., které mají však svoje vlastní chyby  $\sigma_r$ ,  $\sigma_h$ , ... Jak na jejich základě rozumně odhadneme chybu  $\xi$ ? Dejme tomu, že bychom měli odhadnout chybu veličiny  $y$ , kterou vypočteme jako funkci  $f(x_1, x_2)$  dvou jiných veličin, jejichž chyby jsou  $\sigma_{x_1}$ ,  $\sigma_{x_2}$ . Potom kvadrát chyby veličiny  $y$  vypočteme

$$\sigma_y^2 = (f(x_1, x_2) - f(x_1 + \sigma_{x_1}, x_2))^2 + (f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 + \sigma_{x_2}))^2.$$

Zcela stejně postupujeme, i když  $y$  závisí na větším počtu veličin, a to nám dává recept na odhad chyby  $\xi$ .

Rozjezdovou dráhu jsme zhotovili z mírně ohnutého plechu, aby přechod na vodorovné valení byl hladký. Rovněž startovní bod leží na prakticky vodorovném úseku rozjezdové dráhy, abychom se nemuseli bát, že těžiště různých velkých válců bude umístěno na počátku do různých výšek oproti konečné poloze těžiště.

Slepili jsme dvě stejné karimatky a celou dráhu válce jimi překryli. Karimatky je třeba dobře napnout a poté kupříkladu přitížit těžkými prkny. Jako válce jsme použili plastové vodovodní trubky různých průměrů. Kousky trubek délky  $b = 10$  cm jsme doplnili betonem (přesněji směsí vody a cementu) tak, aby měly všechny válce hmotnost 80 g. Válce jsme vážili na kuchyňských vahách a jejich hmotnost se liší maximálně o 2 g. Při výpočtu odporu vzduchu potřebujeme znát hodnotu výrazu  $J/m \cdot r^2$ . Pro homogenní válec nabývá hodnoty  $1/2$ , pro tenkostěnnou trubku téměř hodnoty 1. Naše válce jsou tvořeny trubkou a homogenním válečkem z betonu a moment setrvačnosti celého válce je dán součtem momentů těchto dvou částí. Ze znalosti hmotnosti samotné trubky, samotného válečku z betonu, vnějšího a vnitřního průměru trubky moment  $J$  snadno vypočteme.

## Výsledky měření

Valivý odpor jsme měřili celkem pro šest válců, každý válec jsme nechali valit desetkrát a pouštěli jsme je z výšky  $h = (5,7 \pm 0,2)$  cm. Průměr válce jsme změřili posuvným měřidlem a chybu poloměru potom odhadujeme na 0,1 mm.

Pro přehlednost uvádíme jen průměrnou délku uražené dráhy  $L$  a její směrodatnou odchylku  $\sigma_L$ .  $Z$  uražené dráhy vypočteme dle (9) hodnotu koeficientu  $\mu$  a rameno valivého odporu  $\xi$ .

Tabulka výsledků měření

$r$ [mm]	$\bar{L}$ [cm]	$\sigma_L$ [cm]	$\mu \cdot 10^2$	$\sigma_\mu \cdot 10^2$	$\xi$ [mm]	$\sigma_\xi$ [mm]
9,9	236	2	2,34	0,09	0,23	0,01
12,7	256	3	2,13	0,09	0,27	0,01
16,0	281	3	1,91	0,08	0,31	0,01
20,1	304	4	1,73	0,08	0,35	0,02
24,9	329	4	1,57	0,08	0,39	0,02
31,6	358	2	1,41	0,08	0,44	0,03

Pokud nás nezajímá ani tolik přesná hodnota  $\mu$  či  $\xi$  jako spíše, zda se tyto hodnoty mění při změně poloměru válce, pak pro tento účel můžeme při počítání chyby vynechat vliv nepřesnosti  $h$ , protože se  $h$  pro jednotlivá měření vůbec neliší a nepřesnosti pak budou menší než uvedené.

Větší válce se dokutálejí dál a  $\mu$  s poloměrem klesá. Ovšem z naměřených hodnot je zřejmé, že rameno valivého odporu  $\xi$  v našem případě s poloměrem  $r$  roste. Větší válce se nedokutálejí tak daleko, jak bychom podle teoretického předpokladu čekali.

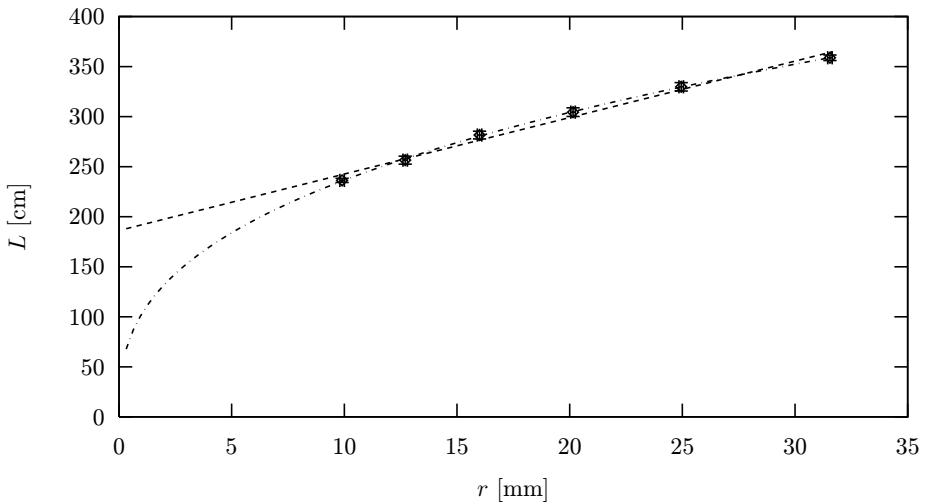
V grafech je vynesena závislost  $\xi$  na poloměru válce  $r$  a závislost uražené dráhy  $L$  na  $r$ . Vidíme, že hodnotami  $\xi$  lze proložit přímkou. Můžeme se ale pokusit hodnoty proložit jinou závislostí. Je rozumné, aby tato závislost šla k nule, když poloměr jde k nule, a aby rameno valivého odporu nebylo nikdy větší než poloměr válce. Naopak pro velká  $r$  očekáváme, že  $\xi$  bude v podstatě konstantní v souladu s teoretickým předpokladem. Potom naměřené hodnoty lze proložit nějakou konkávní křivkou, jak jsme se o to pokusili v grafu. Tato proložená závislost ale možná dává pro malé  $r$  až příliš malé hodnoty  $\xi$ .

## Závěr

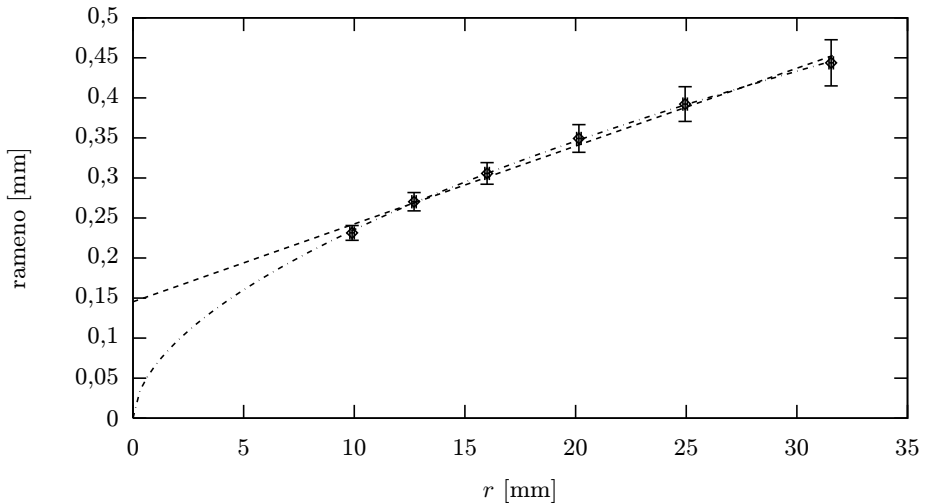
Domníváme se, že zjištěná nekonstantnost ramena valivého odporu  $\xi$  při změně  $r$  je dána nevyzpytatelností povrchu karimatky a podobných měkkých povrchů. Rameno  $\xi$  v našem případě pro větší válce vychází zhruba půl milimetru. V technicky významném případě valení železného kola po železe je  $\xi$  asi desetkrát menší a v případě kuličky v kuličkovém ložisku až stokrát menší. Je pravděpodobné, že pro velké poloměry válců, kdy již bude velikost deformace karimatky malá vůči  $r$ , bude  $\xi$  skutečně přibližně konstantní. Oproti teoretickým předpokladům navíc můžeme zjistit, že rameno  $\xi$  závisí třeba i na hmotnosti válce.

Abychom však mohli dělat významnější závěry, bylo by třeba měření provést na mnoha různých površích.





Obr. 11. Závislost ujeté dráhy na poloměru válce



Obr. 12. Závislost ramena valivého odporu na poloměru válce

### Další měření

Pokoušeli jsme se také změřit valivý odpor trochu jiným způsobem. Měřili jsme rozdíl doby, za kterou válec urazí 1 m po nakloněné rovině, když se v jednom případě valí po tabulce skla a v druhém případě po tabulce skla překryté karimatkou. (Nebo lze měřit jen dobu valení po nakloněné karimatce a ze znalosti sklonu poté vyhodnotit valivý odpor.) Měření byla ovšem zatížena příliš velkou chybou a touto metodou jsme nezískali žádné rozumné výsledky. (Rozmyslete si, v čem tento způsob může být horší než předešlý.)

Aby však naše snaha nevyšla úplně naprázdno, popišme aspoň, jak je možné si amatérsky sestrojít stopky, které automaticky změří dobu, za kterou válec ujede určitou vzdálenost.

Potřebujeme počítač s paralelním portem a operačním systémem Microsoft Windows 98 a starší nebo MS-DOS. (Linuxáři jistě vědí, jak něco podobného provést na Linuxu.) Potom si pořídíme Turbo Pascal a koupíme si samčí konektor k paralelnímu portu<sup>5</sup>.

Paralelní port s 25 kolíky má pět vstupních kolíků. Na vstupní kolíky, jejichž čísla jsou 10, 11, 12, 13 a 15, lze přiložit logickou nulu nebo logickou jedničku a tuto hodnotu potom počítačem přečíst. Logická nula je napětí menší než cca 2 V oproti zemi a logická jednička napětí větší než cca 3 V oproti zemi. Na portu je zároveň několik kolíků značených GND s čísly 18 až 25, které jsou propojeny rovnou se zemí, a na těchto kolících je tedy vždy z definice 0 V.

Napětí na vstupních kolících je možno přečíst a uložit do proměnné příkazem `vstup := port[$379]`. V proměnné `vstup` najdeme číslo v rozmezí 0 až 255. Toto číslo je dekadickým zápisem osmibitového binárního čísla. Binární číslo složené z nul a jedniček říká, že na určitých kolících byla v momentě čtení logická jednička a jinde logická nula. Číslo \$379 je adresa portu a dolar říká, že to je číslo v hexadecimálním tvaru. Adresa může být pro různé počítače různá, ale obvykle paralelnímu portu patří adresa \$378 a několik následujících. V případě našeho počítače je při spuštění přečtená hodnota portu explicitně 255, tedy jakoby všechny kolíky byly připojeny ke kladnému napětí. Když tedy kolík připojíme na nulové napětí, lze tuto změnu zaznamenat.

Nyní si vyrobíme stykač z dvou plátků alobalu. Připájíme drát k některému ze vstupních kolíků paralelního portu (nepájíme samozřejmě přímo na port, ale na koncovku, kterou jsme si pořídili) a druhý drát ke kolíku GND. Izolepou připevníme každý drát k jednomu plátku alobalu. Nyní když váleček přejíždí stykač, plátky se dotknou a na přečteném portu zaznameneáme na určitém kolíku logickou nulu. Tím můžeme zahájit měření času, to znamená uložit si do proměnné aktuální čas, k čemuž slouží funkce `gettime`. Přechodem válce přes druhý stykač můžeme měření času ukončit, tzn. opět zjistíme aktuální čas, předešlý čas odečteme, a máme tudíž stopky.

Je potřeba si s tím maličko pohrát, ale při troše snahy to funguje a jsme schopni měřit s přesností na milisekundy.

### *Poznámky k došlým řešením*

Většina z vás měřila podobně, jako bylo uvedeno, a vesměs všem vyšlo, že se dráha válce zvětšuje s rostoucím poloměrem, tedy že  $\mu$  klesá s  $r$ . Výsledky velmi závisí na vybraném povrchu a materiálu válce.

*Ján Bogár* válec připevnil na nit a nechal táhnout elektromotorkem s konstantními otáčkami. Mezi motorek a válec ještě umístil siloměr. Měřil tedy sílu potřebnou k udržení válce v rovnoměrném pohybu. *Zuzka Chlebounová* zase měřila, jak moc je nutné naklonit podložku, aby se válec dal do pohybu.

Vymysleli jste nemálo způsobů, jak si pořídít válce různých poloměrů. Třeba *Zuzka Chlebounová* vylila papírové formy těstem a poté upekla. *Terka Jeřábková* vymazala trubky indulonou a naplnila sádrou. Ještě než sádra úplně zatuhne, je možné sádrové válce z trubky vytáhnout. Jiní vyráběli z modelíny, papíru, kouleli zavařovací sklenice a podobně. *Zuzka Dočekalová* navrhuje pojmout za válec toaletní papír, protože lze pěkně spojitě měnit jeho poloměr. Jako povrch dráhy posloužil většinou koberec či podobná měkká podložka.

<sup>5)</sup> Všechny elektročástky seženeme třeba v pražských obchodech GES nebo GME.

Mimo jiné nás potěšil i *Jakub Michálek*, protože pěkně diskutoval vliv odporu vzduchu.

*Marek Scholz*

[mara@fykos.mff.cuni.cz](mailto:mara@fykos.mff.cuni.cz)

#### Úloha IV. S ... kvantový harmonický oscilátor (7 bodů; průměr 3,20; řešilo 5 studentů)

Modelujte časový vývoj vlnové funkce částice, kterou umístíme do potenciálu  $V(x) = kx^2/2$  a která je v čase  $\tau = 0$  popsána vlnovou funkcí

$$\begin{aligned}\psi_R(X, 0) &= \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right), \\ \psi_I(X, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o vlnový balík se středem mimo počátek. Prozradíme vám, že jde o tzv. koherentní stav harmonického oscilátoru a vlnový balík by měl harmonicky kmitat kolem počátku s úhlovou frekvencí  $\sqrt{k/m}$  stejně jako klasická částice.

Pokud se vám toto podaří namodelovat, můžete vyzkoušet, jak se budou chovat vlnové balíky o jiné šířce (tedy se jmenovatelem v exponenciále odlišným od čtyř), případně jak bude situace vypadat při jiném průběhu potenciálu. *Zadal autor seriálu Marek Pechal.*

Máme za úkol řešit soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_R(X, \tau)}{\partial\tau} &= -\frac{\partial^2\psi_I(X, \tau)}{\partial X^2} + \frac{1}{4}X^2\psi_I(X, \tau), \\ \frac{\partial\psi_I(X, \tau)}{\partial\tau} &= \frac{\partial^2\psi_R(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{1}{4}X^2\psi_R(X, \tau)\end{aligned}$$

pro reálnou a imaginární část vlnové funkce  $\psi(X, \tau)$ , která závisí na bezrozměrné souřadnici  $X$  a čase  $\tau$ . Počáteční podmínky jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\psi_R(X, 0) &= \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right), \\ \psi_I(X, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Nepřítomnost okrajových podmínek nás nemusí znepokojovat, protože ty jsou zastoupeny podmínkou normalizovatelnosti vlnové funkce – zjednodušeně řečeno musí vlnová funkce pro  $X \rightarrow \pm\infty$  klesat k nule. Stačí tedy zvolit meze  $a$  a  $-a$  dostatečně<sup>6</sup> vzdálené od počátku, ve kterých položíme umělou okrajovou podmínku  $\psi(\pm a) = 0$ .

Rovnici dále diskretizujeme v proměnné  $X$ , tj. rozdělíme interval  $(-a, a)$  na  $2N + 1$  uzlových bodů ekvidistantně rozmístěných ve vzdálenostech  $a/N$ . Hodnoty vlnové funkce v těchto bodech označíme  $\psi^{(j)}(\tau) = \psi(a_j/N, \tau)$ , kde  $j \in \{-N, -N + 1, \dots, N\}$ . Z okrajových podmínek pak plyne  $\psi^{(-N)}(\tau) = \psi^{(N)}(\tau) = 0$ . Druhou parciální derivaci podle  $X$  v bodě  $X = a_j/N$  pak zapíšeme pomocí její diskrétní aproximace

$$\frac{\psi^{(j-1)}(\tau) - 2\psi^{(j)}(\tau) + \psi^{(j+1)}(\tau)}{(a/N)^2}.$$

<sup>6</sup> To znamená takové, že hodnota vlnové funkce v bodech  $\pm a$  je zanedbatelná proti hodnotám v okolí počátku.

Z naší soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic tak dostaneme soustavu  $4N - 2$  obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)

$$\frac{d\psi_R^{(j)}(\tau)}{d\tau} = - \left(\frac{N}{a}\right)^2 (\psi_I^{(j-1)}(\tau) - 2\psi_I^{(j)}(\tau) + \psi_I^{(j+1)}(\tau)) + \frac{1}{4} \left(\frac{aj}{N}\right)^2 \psi_I^{(j)}(\tau),$$

$$\frac{d\psi_I^{(j)}(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{N}{a}\right)^2 (\psi_R^{(j-1)}(\tau) - 2\psi_R^{(j)}(\tau) + \psi_R^{(j+1)}(\tau)) - \frac{1}{4} \left(\frac{aj}{N}\right)^2 \psi_R^{(j)}(\tau),$$

kde  $j \in \{-N + 1, \dots, N - 1\}$ .

Tuto soustavu ODR prvního řádu bychom v principu mohli řešit například některou z Runge-Kuttových metod. My zde však popíšeme jednoduchou metodu<sup>7</sup>, která elegantně využívá speciálního tvaru této soustavy. Můžeme si totiž všimnout, že lze neznámé funkce rozdělit do dvou takových skupin (označme je  $A$  a  $B$ ), že časové derivace funkcí ze skupiny  $A$  závisí jen na hodnotách funkcí ze skupiny  $B$  a naopak (v našem případě jsou těmito skupinami funkce  $\psi_R^{(j)}(\tau)$  a  $\psi_I^{(j)}(\tau)$ ).

Při integraci takové soustavy ODR je obzvláště výhodné počítat hodnoty funkcí ze skupiny  $A$  v časech  $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots$ , zatímco hodnoty funkcí ze skupiny  $B$  v mezilehlých časech  $t_0 + h/2, t_0 + 3h/2, t_0 + 5h/2, \dots$ . Potom totiž můžeme k počítání hodnot v každém dalším čase využít symetrickou aproximaci první derivace. Máme-li například soustavu dvou rovnic

$$\frac{df(t)}{dt} = F(g(t), t),$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = G(f(t), t),$$

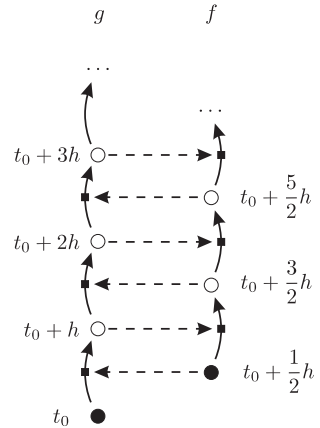
plynou z aproximací  $df(t)/dt \approx (f(t + h/2) - f(t - h/2))/h$  a  $dg(t)/dt \approx (g(t + h/2) - g(t - h/2))/h$  vztahy

$$f(t_0 + (j + \frac{1}{2})h) = f(t_0 + (j - \frac{1}{2})h) + hF(g(t_0 + jh), t_0 + jh),$$

$$g(t_0 + (j + 1)h) = g(t_0 + jh) + hG(f(t_0 + (j + \frac{1}{2})h), t_0 + (j + \frac{1}{2})h).$$

Pokud tedy na počátku známe hodnotu funkce  $f$  v bodě  $t_0 + h/2$  a  $g$  v  $t_0$ , můžeme ihned pomocí druhého z předchozích dvou vztahů vypočítat hodnotu  $g$  v  $t_0 + h$ , dále pomocí prvního vztahu  $f$  v  $t_0 + 3h/2$  a tak dále (viz obrázek 13) až do hodnoty  $t$ , kterou potřebujeme.

Tento postup snadno zobecníme i na naši původní soustavu ODR. Jedinou komplikací, která nás dělí od napsání programu pro řešení Schrödingerovy rovnice, je to, že známe počáteční podmínky pro  $\psi_R^{(j)}(\tau)$  i  $\psi_I^{(j)}(\tau)$  ve stejném čase a ne v časech navzájem posunutých o  $h/2$ , jak

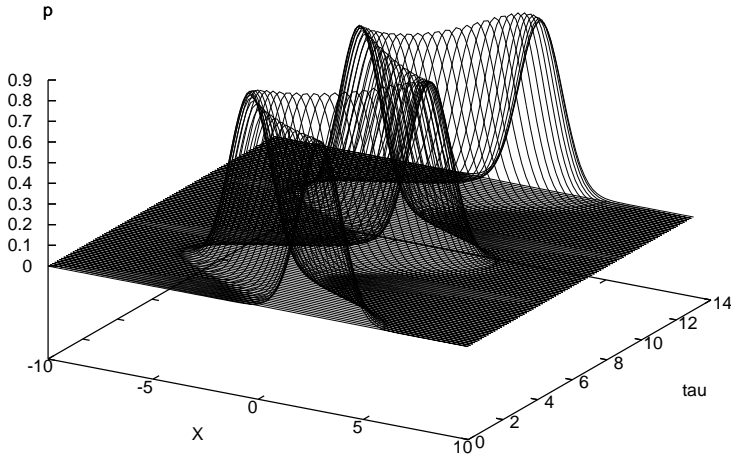


Obr. 13. Ilustrace řešení soustavy ODR

<sup>7)</sup> Tato metoda je pěkně popsána i v prvním dílu *Feynmanových přednášek z fyziky* nebo v chytré knize *Computational Physics* od R. H. Landaua a M. J. Páeze.

vyžaduje výše popsaný algoritmus. To ovšem jednoduše vyřešíme jediným počátečním krokem o  $h/2$  s použitím *asymetrické* aproximace první derivace.

Nakonec ještě využijeme další trik, podle kterého získáme přesnější hodnotu hustoty pravděpodobnosti, pokud místo  $\psi_R^2(t) + \psi_I^2(t)$  budeme počítat  $\psi_R^2(t) + \psi_I(t - h/2)\psi_I(t + h/2)$ .



Obr. 14. Závislost hustoty pravděpodobnosti na poloze a čase pro částice v koherentním stavu harmonického oscilátoru.

Klíčové části kódu pak mohou vypadat například takto ...

```

hx:= a/N;
// predvypocet pocatecni hodnoty pI - krok zpet o h/2
for j:= -N+1 to N-1 do
  pI[j][0] := pI[j][0] - h / 2 * ((pR[j - 1][0] +
    pR[j + 1][0] - 2 * pR[j][0])/sqr(hx) -
    pR[j][0] * sqr(hx * j) / 4);
// reseni rovnice
for k := 0 to maxk - 1 do
  // vypocet hodnot pR a pI v nasledujicim case
  for j := -N + 1 to N - 1 do begin
    pI[j][k + 1] := pI[j][k] + h * ((pR[j - 1][k] + pR[j + 1][k] - 2 * pR[j][k])
      / sqr(hx) - pR[j][k] * sqr(hx * j) / 4);
    pR[j][k + 1] := pR[j][k] - h*((pI[j - 1][k] + pI[j + 1][k] - 2 * pI[j][k])
      / sqr(hx) - pI[j][k] * sqr(hx * j) / 4);
  end;
end;
```

```
// vypocet hustoty pravdepodobnosti
for k:= 0 to maxk -1 do
  for j := -N + 1 to N - 1 do
    p[j][k] := sqr(pR[j][k]) + pR[j][k] * pR[j][k + 1];
...

```

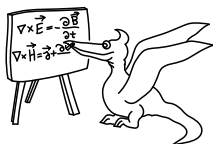
V tomto programu obsahuje pole  $pR[j][k]$  hodnoty  $\psi_R^{(j)}(\tau_0 + kh)$ , pole  $pI[j][k]$  pak hodnoty  $\psi_I^{(j)}(\tau_0 + (k-1/2)h)$ . Počáteční hodnoty v čase  $\tau_0$  jsou na začátku uloženy v  $pR[j][0]$  a  $pI[j][0]$ . V poli  $p[j][k]$  je na konci výpočtu uložena hustota pravděpodobnosti v bodech  $X = aj/N$  a časech  $\tau = \tau_0 + kh$ .

Pokud si výše popsany program napíšete (nebo stáhnete z našich webových stránek) a budete s ním chvíli experimentovat, zjistíte, že použitý algoritmus bohužel není stabilní. K tomu, abychom mohli nasimulovat několik málo kmitů částice, je třeba použít poměrně dosti malý časový krok. Jinak se jakékoliv malé odchylky vlnové funkce (vzniklé například zaokrouhlováním) v průběhu výpočtu neúnosně zesílí a znehodnotí celý výsledek. Abychom tento efekt co nejvíce potlačili, je kromě volby dostatečně malého časového kroku nutné, aby počáteční vlnová funkce byla co nejhladší. Není proto příliš rozumné ji nastavit jednoduše jako  $\exp(-(X - X_0)^2/4)$ . Vzhledem k okrajové podmínce, která vyžaduje nulovost vlnové funkce v krajních bodech  $X = \pm a$ , by pak právě v krajních bodech měla vlnová funkce skok. Ten by při výpočtu způsobil vznik a šíření stále silnějších oscilací ve vypočtených hodnotách. Tento problém lze částečně vyřešit například použitím počáteční vlnové funkce  $(1 - (X/a)^2) \exp(-(X - X_0)^2/4)$ . Faktor  $(1 - (X/a)^2)$  vhodně utlumí gaussovský člen v okrajových bodech a přitom jej téměř neovlivní v oblasti, kde je jeho hodnota nezanedbatelná.

V grafu na obrázku 14 jsme hustoty pravděpodobnosti získali položením  $h = 10^{-4}$ ,  $N = 50$ ,  $a = 10$ ,  $\tau_1 - \tau_0 = 14$ ,  $X_0 = 3$ .

*Marek Pechal*

marek@fykos.mff.cuni.cz



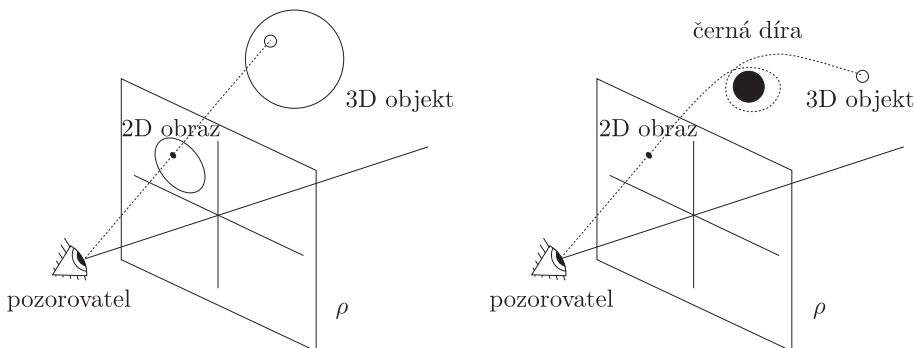
## Seriál na pokračování

### Kapitola 6: To nejlepší na konec

V poslední kapitole našeho seriálu jsme pro vás vybrali několik zajímavých úloh. Je úplně na vás, kterou z nich si vyberete a zpracujete. Narozdíl od předchozích dílů, kdy jsme vesměs vyžadovali řešení všech částí úlohy, nám nyní bude stačit, pokud důkladně zpracujete jedno z nabízených témat. Nikomu samozřejmě nebudeme bránit ve zpracování více úloh a za zajímavá řešení se i nyní můžete dočkat premiových bodů.

#### Raytracing

Jistě jste někdy slyšeli o efektu tzv. gravitační čočky, tj. odchylování světelných paprsků v okolí velmi hmotných těles. Lze očekávat, že tento fyzikální jev bude mít například v blízkosti černé díry<sup>8</sup> za následek spektakulární vizuální efekty – světlo může oběhnout kolem díry (i vícekrát) a vrátit se k pozorovateli – ten pak uvidí obraz sebe sama. Efektivní obrázky typu, *jak to vypadá poblíž černé díry*, se dají vytvořit užitím metody zvané *raytracing* (sledování paprsku), jejíž základní princip zde popíšeme.



Obr. 15. Princip raytracingu. Vlevo jednoduchá situace s rovnoměrným šířením paprsků. Vpravo složitější situace – je třeba použít sledování paprsku „pozpátku“

Nejdříve si ujasněme, jakým způsobem se vytváří například na obrazovce počítače dvou-rozměrný obraz trojrozměrné situace. Mezi pozorovatelem a pozorovaným objektem se umístí myšlená rovina  $\rho$ . Sledujeme-li pak paprsek směřující z určitého bodu objektu do oka (kamery, fotoaparátu atd.) pozorovatele, zaznamenáme průsečík tohoto paprsku s rovinou  $\rho$  (viz obrázek 15) a toto provedeme pro všechny<sup>9</sup> body objektu, pak takto vzniklý obraz ve dvou-rozměrné rovině je z hlediska pozorovatele ekvivalentní s původní trojrozměrnou scénou. Samozřejmě je

<sup>8)</sup> Černá díra je extrémně masivní objekt, který ve svém gravitačním poli může uvěznit i světlo.

<sup>9)</sup> V praxi samozřejmě vybereme jen konečně mnoho bodů objektu, které pak zobrazíme. Je-li objektem například křivka, pokryjeme ji rozumným množstvím pokud možno rovnoměrně rozmístěných bodů a ty nakonec opět pospojujeme.

přirozené zobrazovat pouze ty body, jejichž obraz padne do určité omezené oblasti roviny  $\varrho$ , která odpovídá zornému poli lidského oka.

V principu můžeme při vykreslování trojrozměrné scény na počítači metodou raytracingu postupovat dvěma způsoby. Buď procházíme všechny body zobrazovaného objektu a pro každý zkonstruujeme a vykreslíme příslušný bod v rovině  $\varrho$ , nebo procházíme všechny body (pixely) roviny  $\varrho$ , pro každý zjistíme, zda odpovídající paprsek protne zobrazovaný objekt, a podle toho jej vykreslíme, resp. nevykreslíme.

Nevýhodou prvního přístupu je, že ne vždy můžeme jednoduše určit dráhu světelného paprsku, který prochází dvěma danými body. Jednou z takových situací je právě vyšetřování zmíněného odchylování světla v gravitačním poli (viz obrázek 15 vpravo).

V tomto ohledu je výhodnější druhý přístup – je dán bod, kterým má paprsek procházet (oko pozorovatele), a směr paprsku v tomto bodě (ten je určen průsečíkem s rovinou  $\varrho$  – přitom předpokládáme přímý chod paprsku mezi okem a touto rovinou). Jelikož je dráha paprsku většinou dána nějakou diferenciální rovnicí, ocitáme se zde na známé půdě. Je třeba řešit ODR s danými počátečními podmínkami. Nevýhodou tohoto přístupu ovšem je, že musíme umět najít průsečík známého paprsku s pozorovaným objektem. To však může být zejména v případě komplikovaných tvarů velmi obtížné.

První přístup můžeme použít například tehdy, když se paprsky šíří přímočaře. Ač to může na první pohled vypadat jako poměrně nudný případ, pokusíme se vás přesvědčit o opak. Uvažujme nějakou statickou trojrozměrnou scénu a představme si, že skrz ni prolétáme velmi vysokou (tj. relativistickou) rychlostí. Co uvidíme? Zajímá nás vzhled scény, jak ji vidí pohybující se pozorovatel v nějakém pevně daném bodě P své dráhy.

Bodem P v každém okamžiku (bez ohledu na to, zda tam pozorovatel je, nebo není) procházejí paprsky ze všech odtud viditelných bodů scény. Tyto paprsky jsou přímé, a nedělá nám tedy problém určit směr jejich šíření. Takto ovšem zjistíme směr šíření paprsku vzhledem ke statické scéně. Abychom zjistili jeho směr vzhledem k pozorovateli (a následně provedli známou proceduru s rovinou  $\varrho$ ), stačí provést Lorentzovu transformaci, která ve speciální teorii relativity popisuje vztah mezi dvěma vůči sobě se pohybujícími inerciálními vztažnými systémy.

Jsou-li  $n_x, n_y$  a  $n_z$  souřadnice jednotkového vektoru ve směru šíření paprsku a  $f$  jeho frekvence, pak ztveřice čísel  $(f, n_x f, n_y f, n_z f)$  představuje tzv. vlnový čtyřvektor. Je-li souřadná soustava zvolena tak, že pohyb pozorovatele se děje rychlostí  $v$  ve směru osy  $z$  (takovou volbu můžeme provést bez újmy na obecnosti), pak vlnový čtyřvektor transformovaný do vztažné soustavy spojené s pozorovatelem je

$$(f', f' n'_x, f' n'_y, f' n'_z) = (f(1 - \beta n_z) \gamma, f n_x, f n_y, f(n_z - \beta) \gamma),$$

kde  $\beta$  je zkrácené označení pro výraz  $v/c$  a  $\gamma$  pro  $1/(\sqrt{1 - \beta^2})$ .

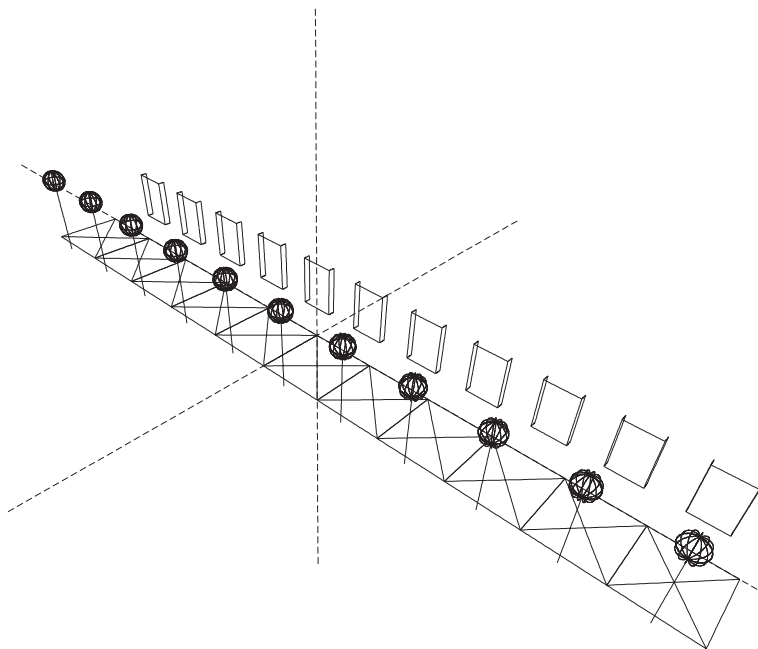
Odtud snadno vypočítáme transformované složky  $n'_x, n'_y$  a  $n'_z$  směrového vektoru paprsku (a frekvenci  $f'$ , zajímá-li nás i vliv Dopplerova jevu). Pak již jistě dokážeme určit průsečík takto definovaného paprsku s rovinou  $\varrho$  a tím je konstrukce obrazu viděného pozorovatelem dokončena.

Naše teoretické povídání ukončíme ukázkou několika obrázků získaných právě popsanou metodou<sup>10</sup>. Pro demonstraci jsme použili scénu znázorněnou na obrázku 16. Pozorovatel je

<sup>10)</sup> Na FYKOSích stránkách bude nejspíše umístěno i několik krátkých animovaných sekvencí.

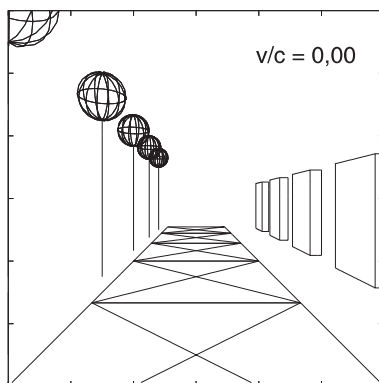


v okamžiku zachycení obrázku v počátku, dívá se v „podélném směru“, který je také směrem jeho rychlosti. Obraz, který vidí při nulové rychlosti, ukazuje obrázek 17.



Obr. 16. Ukázková trojrozměrná scéna

Obrazy, které náš pozorovatel vidí při pohybu relativistickými rychlostmi, jsou pro několik hodnot  $v$  (kladných při pohybu ve směru pohledu) znázorněny na obrázku 18.

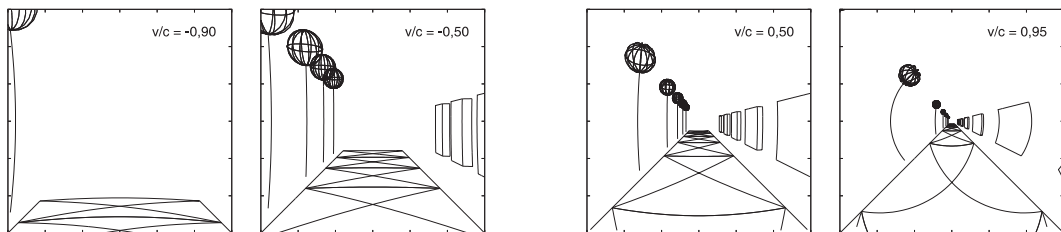


Obr. 17. Scéna z obrázku 16, jak ji vidí nehybný pozorovatel

Pokud vás pohled na tyto obrázky povzbudil a chtěli byste si raytracing vyzkoušet také, pokuste se vytvořit vlastní program na vizualizaci vzhledu objektů z hlediska relativistického

pozorovatele a pošlete nám jej i se získanými obrázky (nezapomeňte funkci svého programu řádně okomentovat). Odvážnější se mohou zkusit poprat i se zmíněnou černou dírou. Budou však zřejmě muset využít druhý popsaný přístup a sledovat paprsek pozpátku od oka pozorovatele až k jeho průsečíku se sledovaným objektem. Proradíme vám, že světelný paprsek se v okolí sféricky symetrického objektu o hmotnosti<sup>11</sup>  $M$  v polárních souřadnicích  $r$  a  $\varphi$  (pohyb každého paprsku je rovinný, stačí tedy dvě souřadnice) pohybuje podle diferenciální rovnice

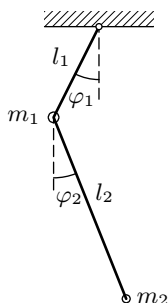
$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}.$$



Obr. 18. Scéna z obrázku 16 z pohledu relativistického pozorovatele při různých rychlostech

## Chaos

Některé poměrně jednoduché mechanické systémy se chovají až překvapivě komplikovaným způsobem. Typickým příkladem je proslulý problém tří těles působících na sebe gravitační silou, který přes svou zdánlivou jednoduchost není analyticky řešitelný. Dalším systémem z podobného souboru je takzvané dvojkvyadlo. Jde o dvě kyvadla, z nichž jedno je upevněné na konec druhého (viz obrázek 19). Tento systém, jakož i široká škála jiných (kulička v pinballu, turbulentně proudící kapalina atd.) se vyznačuje tzv. chaotickým chováním. Chování takových systémů je extrémně citlivé na nastavení počátečních podmínek.



Obr. 19.

Schéma dvojkvyadla a označení jeho parametrů

Ilustrujme to na již zmíněném dvojkvyadle. Na obrázku 20 jsou znázorněny polohy dvou dvojkvyadel v několika různých časech po vypuštění z klidu v čase  $t = 0$  s. Počáteční úhly natočení jejich ramen se liší o pouhou desetitisícinu úhlového stupně. Tento rozdíl je natolik malý, že se na pohybu obou kyvadel prakticky neprojeví až do času cca  $t = 10$  s. Potom se ovšem rozdíly v jejich pohybech dramaticky zvětšují a pro dostatečně velké časy již z okamžitého pozorování nemůžeme na první pohled (tj. bez zpětné integrace pohybových rovnic) usoudit, že obě kyvadla začínala svůj pohyb v téměř identickém počátečním stavu.

Ukazuje se, že pro chaotické systémy se typicky rozdíl  $\Delta$  v jejich vývoji způsobený poněkud odlišnými počátečními podmínkami s časem zvětšuje přibližně exponenciálně. Tedy například rozdíl v natočení ramen dvou

<sup>11)</sup> Užíváme zde tzv. geometrizované jednotky, v nichž má hmotnost rozměr vzdálenosti a Schwarzschildův poloměr (poloměr sféry, z níž není návratu) je roven  $2M$ . Komu se to nelíbí, nechť si všude  $M$  nahradí výrazem  $GM/c^2$ .

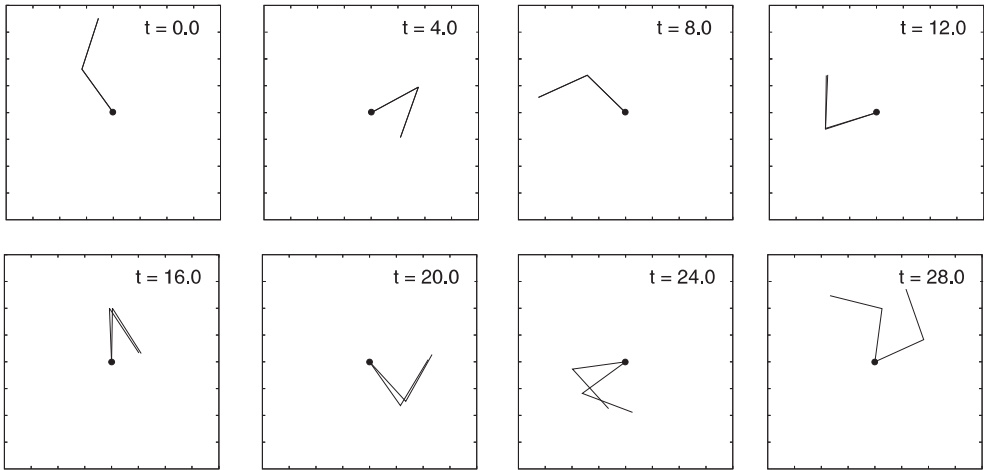
dvojkyvadel by měl alespoň pro malé časy růst úměrně  $e^{\lambda t}$  (pro velké časy samozřejmě brání dalšímu růstu omezení úhlů na interval  $(0, 2\pi)$ ), kde  $\lambda$  je tzv. Lyapunovův exponent. Ten je důležitou charakteristikou každého chaotického systému. Pro různé nastavení počátečních podmínek obou sledovaných systémů mohou vyjít různé hodnoty Lyapunovova exponentu, obvykle nás však zajímá ta nejvyšší, protože nám dává horní odhad „předvídatelnosti“ systému.

Vaším úkolem bude pro chaotické systémy dle vašeho výběru (při něm se můžete inspirovat třeba na internetu) provést dostatečný počet numerických simulací, abyste z nich mohli statisticky vyhodnotit, zda skutečně platí zmíněná exponenciální závislost  $\Delta$  na čase. Pokud ano, proveďte odhad hodnoty maximálního Lyapunovova exponentu. Podle uvážení můžete sledovat i jiné aspekty chování chaotických systémů.

Pohybové rovnice pro dvojité kyvadlo jsou

$$\begin{aligned} \varkappa \ddot{\vartheta}_1 - \mu \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \mu \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \omega^2 \sin \vartheta_1 &= 0, \\ \ddot{\vartheta}_2 - \varkappa \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \varkappa \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \omega^2 \sin \vartheta_2 &= 0, \end{aligned}$$

kde  $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ ,  $\varkappa = l_1/l_2$  a  $\omega^2 = g/l_2$ .



Obr. 20. Časový vývoj dvou dvojkyvadel s mírně odlišnými počátečními podmínkami

Pokud byste si chtěli dvojkyvadlo blíže osahat hravou formou, vřele doporučujeme webovou stránku <http://www.myphysicslab.com/>.

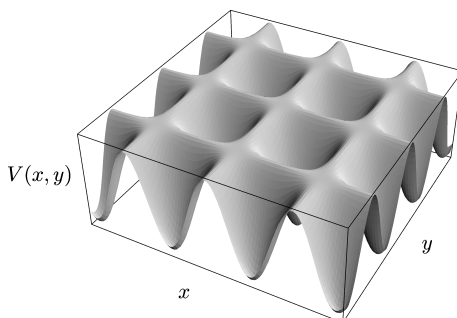
Dalším chaotickým systémem, kterým byste se mohli zabývat, je hmotný bod v dvourozměrném prostoru s periodickým potenciálem daném například vztahem

$$V(x, y) = -\sin^2 x \sin^2 y.$$

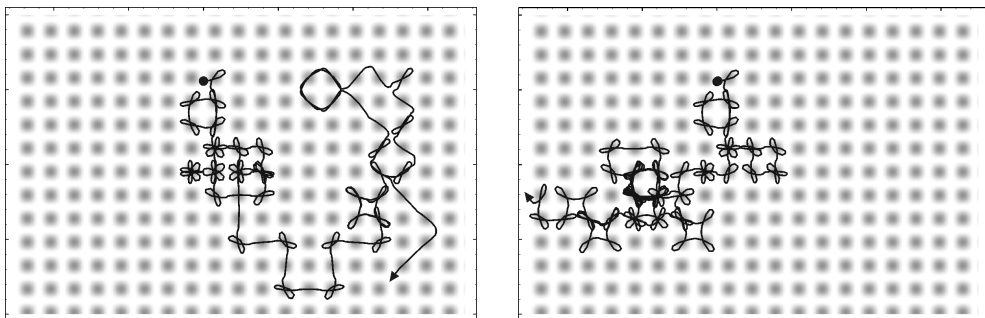
Průběh takového potenciálu je znázorněn v grafu na obrázku 21.

Pokud je celková energie hmotného bodu jen o málo větší než nula, bude se vždy poměrně dlouho pohybovat v jedné z „buněk“, časem ovšem přeskóčí do některé sousední, přičemž je velmi obtížné předvídatelné do které. Celý proces je tedy extrémně citlivý na počáteční podmínky.

Obrázek 22 ukazuje trajektorie dvou hmotných bodů pohybujících se v potenciálu  $V$ , jejichž počáteční rychlosti se liší na místě deváté platné číslice. Opět vidíme, že i zdánlivě zanedbatelný rozdíl se časem významně projeví.



Obr. 21. Graf periodického potenciálu  $V(x, y)$



Obr. 22. Pohyb dvou hmotných bodů s mírně odlišnými počátečními podmínkami v potenciálu  $V(x, y)$

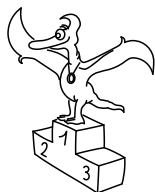
### Rovnováha na kouli

Představme si kouli, na jejímž povrchu je rozmístěno  $N$  stejných velkých nábojů souhlasného znaménka. Náboje se po sféře mohou volně pohybovat. Jak bude vypadat rovnovážný stav, ve kterém se takový systém nakonec ustálí (předpokládejme, že existuje tlumení, které ustavení rovnováhy zaručí). Intuice nám může napovědět, že pro  $N = 4$  by mohly konečné polohy nábojů tvořit vrcholy pravidelného čtyřstěnu, protože náboje se vzájemně odpuzují a mají tendenci mít mezi sebou co největší rozestupy. Tato velmi vágní úvaha nás vede k domněnce, že pro  $N = 4, 6, 8, 12, 20$  budou rovnovážné polohy odpovídat vrcholům platónských těles s příslušným počtem vrcholů.

Pokuste se tuto hypotézu podpořit numerickým modelováním. Prozkoumejte, jak bude rovnováha vypadat pro hodnoty  $N$ , které neodpovídají žádnému pravidelnému mnohostěnu. Můžete také vyzkoušet, jak se výsledek změní, pokud budete uvažovat jinou než coulombickou závislost odpudivé síly na vzdálenosti nábojů.

## Úloha VI. S ... na přání

Pokuste se o řešení libovolného problému z šesté kapitoly seriálu.



## Pořadí řešitelů po IV. sérii



### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	134
1. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	2	0	3	0	-	10	42	37
2. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	4	-	-	2	3	-	11	60	31
3. Barbora Drozdová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	4	-	3	1	-	-	11	54	22
4.-5. Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	2	1	-	2	2	-	-	7	27	18
Ondřej Maslíkiewicz	SPŠ Hronov	1	4	-	-	-	1	-	6	36	18
6. Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	65	13
7. Ji-Hong Min	1st Internat. School, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	44	12
8. Barbora Veselková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	44	7
9. Michal Gallovič	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	17	5
10. Michal Pokorný	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	67	4
11. Ondřej Palla	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	17	3
12. Petr Pecha	ZŠ Školní Valašské Klobouky	2	-	-	-	-	-	-	2	50	2

### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	134
1. Jakub Michálek	G Jana Keplera, Praha	2	4	3	-	2	7	-	18	80	95
2. Jan Hermann	G Český Krumlov	1	4	-	5	4	-	-	14	91	75
3. Airidas Korolkovas		1	4	-	-	-	-	-	5	84	72
4. Lukáš Ledvína	PČG Karlovy Vary	3	4	1	-	5	-	4	17	81	70
5. Marek Nečada	G Jihlava	4	-	3	4	-	-	7	18	81	51
6. Peter Ondáč	G Humenné	3	4	-	-	3	3	-	13	58	42
7. Prabhat Rao Pinnaka		2	4	0	-	-	2	-	8	36	30
8. Juraj Hartman	Jiráskovo G Náchod	-	-	-	-	-	-	-	0	61	22
9. Hana Šírová	G F. Palackého, Val. Meziříčí	-	-	-	-	-	-	-	0	109	12
10.-11. Lukáš Drápál	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	88	7
Dalimil Mazáč	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	140	7

## Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
	<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	134
1.	Zuzana Dočekalová	G Ostrava - Hrabůvka	5	2	3	3	3	5	–	21	69	83
2.	Petr Ryšavý	G J. Heyrovského Praha	2	4	2	2	–	4	–	14	64	72
3.	Petr Cagaš	G Lesní čtvrť, Zlín	2	4	2	2	1	–	2	13	60	66
4.	Tereza Steinhartová	G J. K. Tyla, Hradec Králové	2	4	–	–	–	6	–	12	76	65
5.	Ján Bogár	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	4	2	3	3	4	–	19	64	63
6.	Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	3	–	–	–	4	5	–	12	70	50
7.	Veronika Paštyková	G J. Ortena, Kutná Hora	2	2	1	2	2	4	–	13	40	40
8.	Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	2	4	1	–	2	–	–	9	75	39
9.	Jana Baxová	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	3	2	–	–	4	–	12	48	36
10.–11.	Petra Kňazeková	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	4	1	–	–	4	–	12	53	31
	Michal Müller	G Jevíčko	3	4	1	–	–	4	–	12	60	31
12.	Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	–	–	4	–	–	10	79	26
13.	Lada Peksová	G Ch. Dopplera, Praha	3	4	–	–	–	–	–	7	62	21
14.	Martin Chudjak	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	35	17
15.	František Steinhäuser	G Dačice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	10
16.	Lukáš Křipner	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	0	82	9
17.	Adam Mohammad	1st Internat. School, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	21	7
18.–19.	Michal Španko	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	38	5
	Anna Vacířová	VOŠ a SPŠ G Evropská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	25	5
20.	Irena Pavlíčková	G a SOŠ Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
21.–23.	Michal Bajcar	G F. Živného, Bohumín	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2
	Veronika Drgoňová	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2
	Simona Laňková	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	17	2
24.	Martina Bartoňová	G Hlohovec	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	7	35	100	134
1. <i>Karel Kolář</i>	G Špitálská, Praha	3	4	3	0	3	6	2	21	64	72
2. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	4	2	-	2	-	-	10	77	71
3. <i>Hana Šustková</i>	G Trutnov	2	4	1	2	2	4	1	16	52	70
4. <i>Michal Koutný</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	2	4	1	3	3	-	-	13	73	62
5. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca, Bratislava	2	4	-	-	2	6	-	14	63	56
6. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bilovec	3	3	-	-	2	4	-	12	69	44
7. <i>Alžběta Kadlecová</i>	G Jana Keplera, Praha	3	4	-	3	3	-	-	13	66	43
8. <i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	-	-	-	-	-	-	-	0	71	42
9. <i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	2	4	-	-	-	4	-	10	55	35
10. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická Vsetín	-	4	-	-	2	-	-	6	58	34
11. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	89	33
12.-13. <i>Katarína Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	3	-	-	2	4	-	13	56	32
<i>Miroslav Klímoš</i>	G M. Koperníka, Bilovec	3	4	0	-	3	-	-	10	58	32
14. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	84	31
15. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	4	-	-	1	-	-	7	73	30
16. <i>Dana Suhomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	4	-	-	2	-	-	9	70	21
17.-18. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	4	4	2	-	-	-	-	10	74	20
<i>Martin Zahradník</i>	G Třeboň	3	-	2	-	-	-	-	5	65	20
19. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ Úpice	3	2	1	1	-	-	-	7	34	15
20. <i>Lukáš Čimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	-	-	-	-	-	-	-	0	52	12
21. <i>Josef Tkadlec</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	69	11
22. <i>Vojtěch Tuma</i>	G Roudnice nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	0	67	8
23.-24. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	-	-	-	-	-	-	-	0	50	6
<i>Ondřej Růžička</i>	G a SOŠ Hořice	-	-	-	-	-	-	-	0	38	6
25. <i>Matej Dzuro</i>	G Hlohovec	-	-	-	-	-	-	-	0	21	3
26. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	20	1

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta  
Ústav teoretické fyziky  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.