17. ročník, úloha I.4 ... *autíčko závodník* *(4 body; průměr 2,26; řešilo 58 studentů)*

Auto zrychlí z klidu na 100 km·h^{-1} za půl minuty, přičemž ujede kilometr. Určete průběh rychlosti tak, aby se minimalizovala maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení, kterého auto během pohybu dosáhne.

Lehce přeformulovaný nápad Pavla Habudy.

Logické by bylo uvažovat pohyb s konstantním zrychlením, protože potom by byla i absolutní hodnota zrychlení konstantní a zřejmě i nejmenší (to bychom již lehko dokázali). Problém je v tom, že takový pohyb nesplňuje okrajové podmínky pro dráhu a rychlost. Lehko se můžeme přesvědčit, že konečná rychlost auta nebude maximální dosažená během pohybu (to si můžete ověřit tím, že vynásobíte konečnou rychlost dobou pohybu – vyjde vám méně než 1 km). Je tedy jasné, že nejdříve zrychlí na nějakou rychlost v_1 za čas t_1 a poté zpomalí na koncovou rychlost $v_2 = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v čase $t_2 = 30\,\mathrm{s}$.

Přirozené je vzít konstantní zrychlení o velikosti a, kterým bude v prvním úseku zrychlovat a v druhém zpomalovat. Potom je i maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení rovna a. Je třeba dokázat, že tento pohyb skutečně odpovídá podmínkám zadání. V důkazu použijeme myšlenku *Pavla Kocourka.*

Nechť existuje pohyb s maximální absolutní hodnotou zrychlení a', která je ostře menší než a. Potom pro rychlost při zrychlování platí $v' \leq a't < at$. Při zpomalování bude analogicky platit $v' \leq v_2 + a'(t_2 - t) < a(t_2 - t)$. To znamená, že rychlost bude po celou dobu pohybu menší než v případě s konstantním zrychlením a autíčko ujede méně než 1 km. Stejný důkaz by se dal použít pro pohyby, kdy auto chvíli zrychluje a chvíli zpomaluje.

Přistupme teď k výpočtu. Uvážíme-li, že $v_1 = at_1$, dostaneme pro pohyb vztahy

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2,$$
$$v_2 = at_1 - a(t_2 - t_1) = a(2t_1 - t_2).$$

To je soustava dvou rovnic pro dvě neznámé t_1, a. Řešením je

$$t_1 = \frac{2v_2t_2 - 2s + \sqrt{4s^2 - 4sv_2t_2 + 2v_2^2t_2^2}}{2v_2},$$
$$a = \frac{v_2}{2t_1 - t_2}.$$

Po dosazení za zadané hodnoty dostaneme $t_1 = 19{,}8\,\mathrm{s}$, $a = 2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Auto nejdříve zrychluje se zrychlením a po čas t_1, poté zpomaluje se zrychlením $-a$ až do času t_2.

Elegantní, ale poněkud komplikovanější důkaz sestrojil Matouš Ringel, když využil geometrických vlastností hledané trajektorie. Řešitele bych rozdělil do tří kategorií:

1) Řešitel si nevšiml, že rovnoměrně zrychlený pohyb neodpovídá podmínkám zadání, a tudíž ho uvedl jako ten nejvýhodnější.
2) Řešitel sice vyloučil výše zmíněný pohyb, ale chybně předpokládal, že zrychlení musí být buď lineární, nebo jinou komplikovanější funkcí času.
3) Řešitel vyřešil úlohu správně.

Jarda Trnka
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.